BME Közlekedésautomatikai Tanszék

Feladatgyűjtemény az Irányítástechnika II. c. tárgyhoz

Összeállította:

Dr. Bokor József egyetemi tanár
Dr. Gáspár Péter egyetemi tanár
Bauer Péter tudományos munkatárs
Luspay Tamás tudományos munkatárs
Németh Balázs PhD hallgató
Tettamanti Tamás tanársegéd

2011

Tartalomjegyzék

1. Dinamikus rendszerek és irányításuk: klasszikus módszerek **3**
1.1. Egy kis matematika . . . 3
1.1.1. Laplace- és inverz Laplace-transzformáció . . . 3
1.1.2. Polinomosztás . . . 5
1.2. Rendszerek vizsgálata idő- és operátortartományban . . . 7
1.3. Rendszerek vizsgálata frekvenciatartományban . . . 23
1.4. Soros kompenzálás . . . 35
1.5. Robusztus stabilitás . . . 47

2. Bevezetés az állapottér-elméletbe **55**
2.1. Állapottér-reprezentációk tulajdonságai, kapcsolata . . . 55
2.2. Pólusallokáció . . . 67

Előszó

A feladatgyűjtemény a BME Közlekedésmérnöki Karán oktatott Irányítástechnika II. tantárgy oktatási segédleteként a gyakorlati példák megoldását és megértését hivatott szolgálni.

A gyűjteményben található 63 darab feladat az elmúlt 10 év zárthelyi dolgozatainak és vizsgáinak szemelvénye. A példák végigkövetik a tantárgy elméleti tananyagát jó gyakorlási és ellenőrzési lehetőséget biztosítva a különböző feladattípusokhoz. Megjegyzendő ugyanakkor, hogy a kidolgozott feladatok megértéséhez szükséges a tananyag elméleti részének megfelelő ismerete is.

Külön köszönet illeti meg Polgár János MSc hallgatót a segédlet összeállításában való részvételéért, illetve Bauer Péter tudományos munkatársat a feladatgyűjtemény lektorálásáért.

1. fejezet

Dinamikus rendszerek és irányításuk: klasszikus módszerek

1.1. Egy kis matematika

Ebben a fejezetben a feladatgyűjteményben található feladatok megoldásához szükséges matematikai apparátus gyakorlására találunk feladatokat. A feladatok az egyoldalas *Laplace*-transzormáció (a továbbiakban jelző nélkül), az inverz *Laplace*-transzformáció és a polinomosztás területére terjednek ki.

Az előbbi két témakör részletesebb kifejtése megtalálható [1] A. függelékében. A mátrixszámítás néhány területére az említett mű C. függeléke tér ki.

1.1.1. Laplace- és inverz Laplace-transzformáció

Adjuk meg a következő függvények *Laplace*-transzformáltját ($\mathcal{L}$-transzformáltját)!
A $\mathcal{L}$-transzformáció olyan integráltranszformáció, mely az időtartományi $f(t)$ függvényhez az operátortartománybeli $F(s)$ függvényt rendeli a következőképpen:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \qquad s \in \mathbb{C}$$

1.1.1 $\quad f(t) = e^{-\alpha t}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-t(\alpha+s)}dt = \left[\frac{e^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right]_0^\infty =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right] - \left.\frac{e^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right|_{t=0} = 0 - \frac{1}{-(\alpha+s)} = \frac{1}{\alpha+s}$$

1.1.2 $\quad f(t) = 1 - e^{-\alpha t}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{1 - e^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(e^{-st} - e^{-t(\alpha+s)}\right)dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-t(\alpha+s)}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \left[\frac{e^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right]_0^\infty =$$
$$= \left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}\right] - \left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right) - \left.\frac{e^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right|_{t=0}\right] =$$
$$= \left[0 - \frac{1}{-s}\right] - \left[0 - \frac{1}{-(\alpha+s)}\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha+s}$$

1.1.3 $\quad f(t) = e^{i\omega t}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = \int_0^\infty e^{i\omega t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-t(s-i\omega)} dt = \left[\frac{e^{-t(s-i\omega)}}{-(s-i\omega)} \right]_0^\infty =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{e^{-t(s-i\omega)}}{-(s-i\omega)} \right] - \left. \frac{e^{-t(s-i\omega)}}{-(s-i\omega)} \right|_{t=0} = 0 - \frac{1}{-(s-i\omega)} = \frac{1}{s-i\omega}$$

Határozzuk meg a következő függvények inverz *Laplace*-transzformáltját($\mathcal{L}^{-1}$-transzformáltját)!

Megjegyzés: $F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ alakú függvények esetén az inverz *Laplace*-transzformált a Residuum-tétel segítségével is kiszámítható:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s\to p_i} \left[(s-p_i) \cdot \frac{b(s)}{a(s)} \cdot e^{st} \right],$$

ahol a p_i-k az $a(s)$ polinom gyökei (azaz az $a(s) = 0$ egyenlet megoldásai).

1.1.4 $\quad F(s) = \frac{2}{5s+1}$

$$F(s) = \frac{0,4}{s + \frac{1}{5}}$$

$$s + \frac{1}{5} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -\frac{1}{5}$$

$$f(t) = \lim_{s\to -\frac{1}{5}} \left[\left(s + \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{0,4}{s+\frac{1}{5}} \cdot e^{st} \right] = \lim_{s\to -\frac{1}{5}} \frac{2}{5} \cdot e^{st} = \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}t}$$

1.1.5 $\quad F(s) = \frac{2}{s(5s+1)}$

$$F(s) = \frac{0,4}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)}$$

$$s(s + \frac{1}{5}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -\frac{1}{5}$$

$$f(t) = \lim_{s\to 0} \left[s \cdot \frac{0,4}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)} \cdot e^{st} \right] + \lim_{s\to -\frac{1}{5}} \left[\left(s+\frac{1}{5} \right) \cdot \frac{0,4}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)} \cdot e^{st} \right] =$$
$$= 2 - 2 \cdot e^{-\frac{1}{5}t} = 2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{5}t} \right)$$

1.1.6 $\quad F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+3s+2)}$

$$s(s^2+3s+2)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1=0, \qquad p_2=-1, \qquad p_3=-2$$

$$f(t)=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot e^{st}\right]+\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot e^{st}\right]+$$

$$+\lim_{s\to -2}\left[(s+2)\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot e^{st}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{-1\cdot(-1+2)}\cdot e^{-t}+\frac{1}{-2\cdot(-2+1)}\cdot e^{-2t}=$$

$$=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2t}$$

1.1.2. Polinomosztás

A következő feladatok a polinomosztás témakörébe tartoznak. A polinomosztás menete a következő: kiszámítjuk az osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjainak hányadosát. Ezzel az értékkel visszaszorozzuk az osztót. Az így kapott eredményt kivonjuk az osztandóból. Ezután a kivonás utáni értéket tekintjük osztandónak, és ezen alkalmazzuk az előbb leírt lépéseket. Az osztás addig tart, amíg az osztandó legnagyobb kitevőjű tagjának fokszáma nagyobb vagy egyenlő, mint az osztó legnagyobb kitevőjű hatványának fokszáma.

1.1.7 $\quad (x^5+x^4-x^3-2x-1):(x^2+1)=$

1. lépés:

Az osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: x^3

$$\begin{gathered}(x^5+x^4-x^3-2x-1):(x^2+1)=x^3\\ -(x^5+x^3)\\ =x^4-2x^3-2x-1 \text{ (ez lesz az új osztandó)}\end{gathered}$$

2. lépés:

Az új osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: x^2

$$\begin{gathered}(x^4-2x^3-2x-1):(x^2+1)=x^2\\ -(x^4+x^2)\\ =-2x^3-x^2-2x-1 \text{ (ez lesz az új osztandó)}\end{gathered}$$

3. lépés:

Az új osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: $-2x$

$$\begin{gathered}(-2x^3-x^2-2x-1):(x^2+1)=-2x\\ -(-2x^3-2x)\\ =-x^2-1 \text{ (ez lesz az új osztandó)}\end{gathered}$$

4. lépés:

Az új osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: -1

$$(-x^2-1):(x^2+1)=-1$$
$$-(-x^2-1)$$
$$=0$$
A eredmény: x^3+x^2-2x-1

1.1.8 $(x^3-1):(x-1)=$

$$(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1$$
$$-(x^3-x^2)$$
$$=x^2-1$$
$$-(x^2-x)$$
$$=x-1$$
$$-(x-1)$$
$$=0$$
Az eredmény: x^2+x+1

1.1.9 $(x^4-2x^3+4x^2-6x+8):(x-1)=$

$$(x^4-2x^3+4x^2-6x+8):(x-1)=x^3-x^2+3x-3$$
$$-(x^4-x^3)$$
$$=-x^3+4x^2-6x+8$$
$$-(-x^3+x^2)$$
$$=3x^2-6x+8$$
$$-(3x^2-3x)$$
$$=-3x+8$$
$$-(-3x+3)$$
$$=5$$
Az osztásban maradék képződött.Az eredmény: $x^3-x^2+3x-3+\dfrac{5}{x-1}$

1.1.10 $(x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10):(x^2-2x+2)=$

$$(x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10):(x^2-2x+2)=x^3-x+5$$
$$-(x^5-2x^4+2x^3)$$
$$=-x^3+7x^2-12x+10$$
$$-(-x^3+2x^2-2x)$$
$$=5x^2-10x+10$$
$$-(5x^2-10x+10)$$
$$=0$$
Az eredmény: x^3-x+5

1.1.11 $(2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x + 1) =$

$$
\begin{aligned}
(2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x + 1) = 2x^2 - 3x + 5 \\
-(2x^4 + 2x^3 + 2x^2) \\
= -3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \\
-(-3x^3 - 3x^2 - 3x) \\
= 5x^2 + 6x + 2 \\
-(5x^2 + 5x + 5) \\
= x - 3
\end{aligned}
$$

Az osztásban maradék képződött.Az eredmény: $2x^2 - 3x + 5 + \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

1.2. Rendszerek vizsgálata idő- és operátortartományban

A következő feladatokban adott egy átviteli függvény. Adjuk meg a hozzá tartozó súly- ($w(t)$) és átmeneti ($v(t)$) függvényt! A megoldást ábrázoljuk a jellegzetes értékek feltűntetésével! A feladatokban az $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ összefüggést használjuk! (A bemenő jelek $\mathcal{L}$-transzformáltjai megtalálhatók [1] 261. oldalán.)

1.2.1 $G(s) = \dfrac{1}{10s+1}$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{10}}{s + \frac{1}{10}}$$

$$W(s) = G(s) \cdot 1$$

$$s + \frac{1}{10} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -\frac{1}{10}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{10}}{s+\frac{1}{10}}\right\} = \lim_{s \to -\frac{1}{10}} \left[\left(s + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\left(s + \frac{1}{10}\right)} \cdot e^{st}\right] =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$$

Az eredményként kapott függvény $A \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ alakú.

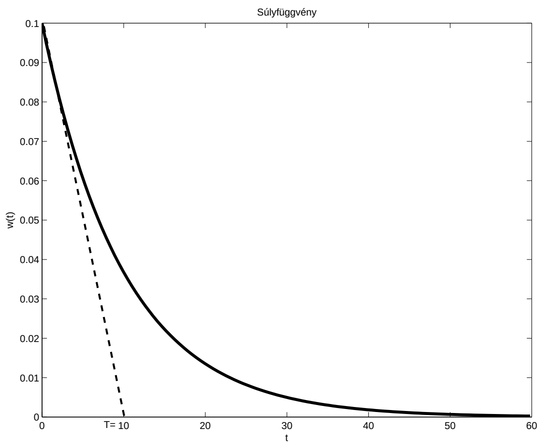
$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

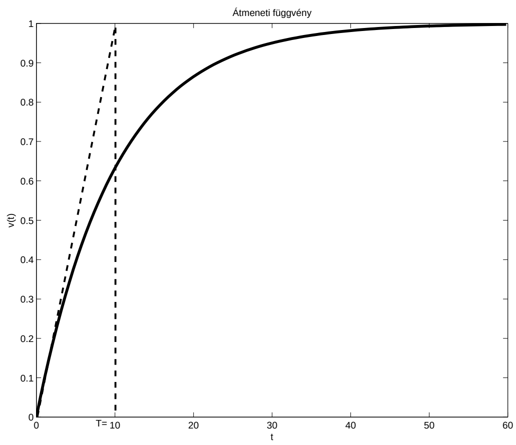
$$s(10s+1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -\frac{1}{10}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{10}}{s\left(s+\frac{1}{10}\right)}\right\} = \lim_{s \to 0}\left[s \cdot \frac{\frac{1}{10}}{s\left(s + \frac{1}{10}\right)} \cdot e^{st}\right] +$$

$$+\lim_{s\to-\frac{1}{10}}\left[\left(s+\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{\frac{1}{10}}{s\left(s+\frac{1}{10}\right)}\cdot e^{st}\right]=1+\frac{1}{-1}\cdot e^{-\frac{1}{10}t}=1-e^{-\frac{1}{10}t}$$

Az eredményként kapott függvény $A\cdot(1-e^{-\frac{t}{T}})$ alakú.





1.2.2. $\qquad G(s)=\dfrac{15}{15s+1}$

$$G(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{15}}$$

$$W(s)=G(s)\cdot 1$$

$$s+\frac{1}{15}=0\qquad\Longrightarrow\qquad p_1=-\frac{1}{15}$$

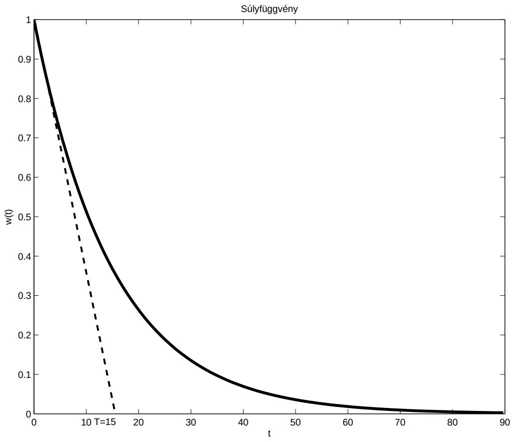
$$w(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot 1\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{15}}\right\}=\lim_{s\to-\frac{1}{15}}\left[\left(s+\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{1}{\left(s+\frac{1}{15}\right)}\cdot e^{st}\right]=e^{-\frac{1}{15}t}$$

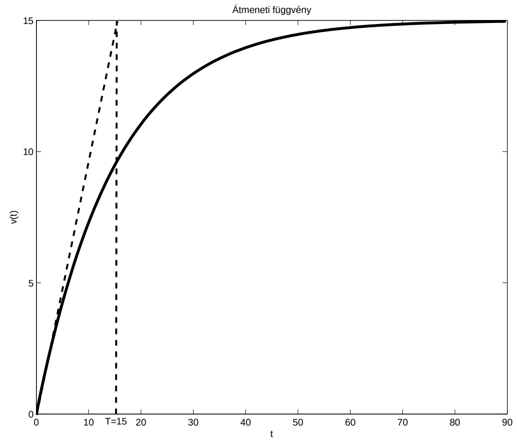
$$V(s)=G(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$$s\left(s+\frac{1}{15}\right)=0\qquad\Longrightarrow\qquad p_1=0,\qquad p_2=-\frac{1}{15}$$

$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\cdot\frac{1}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{15}}\cdot\frac{1}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{15}\right)}\right\}=$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{15}\right)}\cdot e^{st}\right]+\lim_{s\to -\frac{1}{15}}\left[\left(s+\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{15}\right)}\cdot e^{st}\right]=15-15\cdot e^{-\frac{1}{15}t}=$$
$$=15\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{15}t}\right)$$





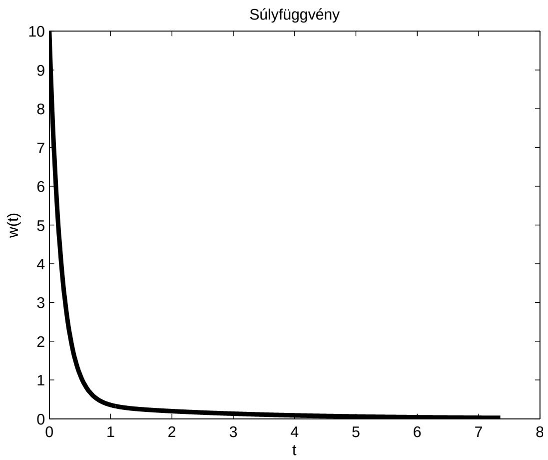
1.2.3 $\quad G(s)=\dfrac{5s+3}{0,5s^2+2,7s+1}$

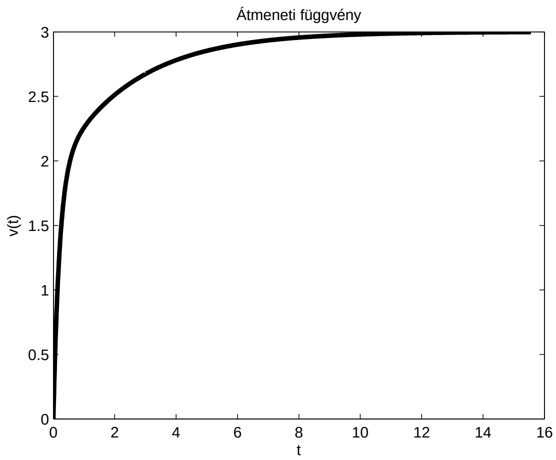
Megjegyzés: a másodfokú nevezőpolinom másodfokú tagjának együtthatóját célszerű 1-re választani, ugyanis a másodfokú kifejezés gyöktényezős alakjában ekkor 1-el kell szorozni az $(s-p_i)$ tagokat. Így $G(s)=\dfrac{10s+6}{s^2+5,4s+2}$ alakú.

$$W(s)=G(s)\cdot 1$$
$$(s^2+5,4s+2)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1=-0,4, \qquad p_2=-5$$
$$w(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot 1\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+6}{s^2+5,4s+2}\right\}=\lim_{s\to -0,4}\left[(s+0,4)\cdot\frac{10s+6}{(s+0,4)(s+5)}\cdot e^{st}\right]+$$
$$+\lim_{s\to -5}\left[(s+5)\cdot\frac{10s+6}{(s+0,4)(s+5)}\cdot e^{st}\right]=\frac{-0,4\cdot 10+6}{-0,4+5}\cdot e^{-0,4t}+\frac{-5\cdot 10+6}{-5+0,4}\cdot e^{-5t}=$$
$$=0,435\cdot e^{-0,4t}+9,565\cdot e^{-5t}$$
$$V(s)=G(s)\cdot\frac{1}{s}$$
$$s(s^2+5,4s+2)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1=0, \qquad p_2=-0,4, \qquad p_3=-5$$
$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\cdot\frac{1}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+6}{s(s^2+5,4s+2)}\right\}=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{10s+6}{s(s+0,4)(s+5)}\cdot e^{st}\right]+$$

$$+\lim_{s\to -0,4}\left[(s+0,4)\cdot\frac{10s+6}{s(s+0,4)(s+5)}\cdot e^{st}\right]+\lim_{s\to -5}\left[(s+5)\cdot\frac{10s+6}{s(s+0,4)(s+5)}\cdot e^{st}\right]=$$

$$=3+\frac{10\cdot(-0,4)+6}{-0,4\cdot(-0,4+5)}\cdot e^{-0,4t}+\frac{10\cdot(-5)+6}{-5\cdot(-5+0,4)}\cdot e^{-5t}=3-1,08\cdot e^{-0,4t}-1,92\cdot e^{-5t}$$





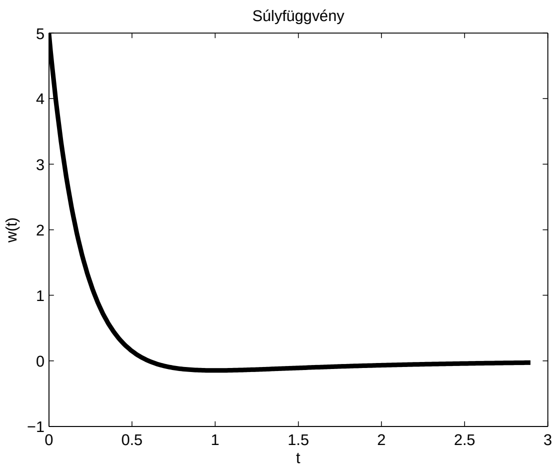
1.2.4 $\qquad G(s)=\dfrac{5s+3}{s^2+6s+5}$

$$W(s)=G(s)\cdot 1$$

$$s^2+6s+5=0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1=-1, \qquad p_2=-5$$

$$w(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot 1\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+3}{s^2+6s+5}\right\}=\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\cdot\frac{5s+3}{(s+1)(s+5)}\cdot e^{st}\right]+$$

$$+\lim_{s\to -5}\left[(s+5)\cdot\frac{5s+3}{(s+1)(s+5)}\cdot e^{st}\right]=\frac{-1\cdot 5+3}{-1+5}\cdot e^{-t}+\frac{-5\cdot 5+3}{-5+1}\cdot e^{-5t}=-0,5\cdot e^{-t}+5,5\cdot e^{-5t}$$



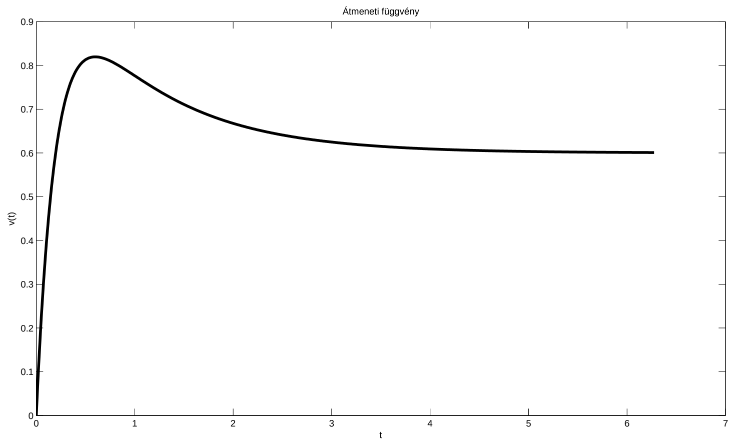
$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$s(s^2+6s+5) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -1, \qquad p_3 = -5$$

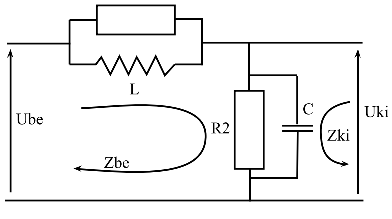
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\cdot\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+3}{s(s^2+6s+5)}\right\} = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{5s+3}{s(s+1)(s+5)}\cdot e^{st}\right] +$$

$$+\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\cdot\frac{5s+3}{s(s+1)(s+5)}\cdot e^{st}\right] + \lim_{s\to -5}\left[(s+5)\cdot\frac{5s+3}{s(s+1)(s+5)}\cdot e^{st}\right] =$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{-5+3}{-1\cdot 4}\cdot e^{-t} + \frac{-22}{-5\cdot(-4)}\cdot e^{-5t} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} - 1,1\cdot e^{-5t}$$

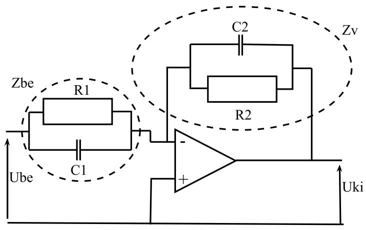


A továbbiakban az 1.2 és 1.3 fejezetben analóg villamos áramköröket és mechanikai öszeállításokat vizsgálunk. A következőkben néhány általános érvényű megállapítást teszünk a fejezetek feladataira vonatkozóan.
Analóg villamos áramkörök vizsgálata esetén az átviteli függvénybe az operátoros impedanciákat kell behelyettesíteni: R helyére R kerül, C helyére $\frac{1}{Cs}$ kerül, L helyére pedig Ls kerül.
A példákban passzív és aktív négypólusok viselkedését vizsgáljuk. A passzív négypólusokban csak passzív elemek (ellenállás, kondenzátor, induktivitás) találhatók, míg az aktívakban műveleti erősítő is szerepel.
Passzív négypólusok esetén az átviteli függvényt a következőképpen lehet felírni:
$G(s) = \dfrac{Z_{ki}}{Z_{be}}$,
ahol Z_{ki} a kimeneti impedancia (az az impedancia, amit a négypólus kimeneti oldaláról „betekintve" látunk), Z_{be} pedig a bemeneti impedancia (az az impedancia, amit a négypólus bemeneti oldaláról „betekintve" látunk). Az elmondottakat ábra is szemlélteti.



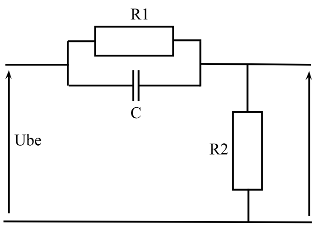
Aktív négypólusok esetén az átviteli függvényt a következőképpen kell felírni:
$G(s) = \dfrac{Z_v}{Z_{be}}$, ahol Z_v a visszacsatolási impedancia (az az impedancia, ami a visszacsatoló ágban van), Z_{be}

pedig a bemeneti impedancia (az az impedancia, ami a négypólus bemenetén van). Az elmondottakat ábra is szemlélteti.



Mechanikai rendszerekre vonatkozó megjegyzések:
1. Ha az átviteli függvény nevezője másodfokú, akkor hozzuk a függvényt olyan alakra, hogy ezen másodfokú tag együtthatója 1 legyen.
2. A feladatokban vázolt rendszerekben található csillapítókamrák viselkedésére a Rayleigh-féle disszipáció igaz. Így az egyenletekben szinte ugyanazt kell felírni, mint a rugók esetében, de a csillapítás nem a távolságtól, hanem annak idő szerinti deriváltjától, a sebességtől függ.
3. A feladatokban erőegyensúlyi egyenleteket írunk fel. Mindenütt adott egy y elmozdulás kimenet, erre a kimenetre írjuk fel az erőegyensúlyt Newton II. axiómája szerint ($F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y}$, ahol m a tömeget, a, ill. $\ddot{y}$ a gyorsulást jelöli).
4. Megállapodás szerint az időtartományi változókat kisbetűvel, az operátortartománybelieket pedig nagybetűvel jelöljük.
5. [2] és a mérnöki gyakorlat szerint a rugóban ébredő erő $F = s \cdot y$, ahol s a rugómerevség, y pedig a rugó hosszváltozása. A mértékegység: $[s] = \frac{N}{m}$. A rugómerevség reciproka a rugóállandó, melyet c-vel jelölünk; $[c] = \frac{m}{N}$. **Mindezek ellenére a következő feladatokban a rugómerevség c-vel van jelölve, mivel $s \in \mathbb{C}$ a Laplace-operátor.**

1.2.5 Adott az alábbi négypólus. Határozzuk meg a rendszer súly- és átmeneti függvényét!



$$R_1 = 1k\Omega, \qquad R_2 = 5k\Omega, \qquad C = 2\mu F, \qquad w(t) = ?, \qquad v(t) = ?$$

$$G(s) = \frac{Z_{ki}}{Z_{be}} = \frac{R_2}{R_2 + R_1 \times \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{\frac{R_1}{Cs}}{\frac{R_1Cs+1}{Cs}}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{R_1Cs+1}} = \frac{R_2}{\frac{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}{R_1Cs+1}} =$$

$$= \frac{R_1R_2Cs + R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2} = \frac{5(0,002s+1)}{6(0,00167s+1)}$$

A $\mathcal{L}^{-1}$-transzformációt csak akkor lehet elvégezni, ha a számláló fokszáma kisebb, mint a nevezőé. Az ilyen alakú függvény előállítása például polinomosztással történhet.

$$G(s) = \frac{5}{6}\left(\frac{6}{5} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{3}\cdot 10^{-3}s + 1}\right) = 1 - \frac{100}{s+600}$$

$$W(s) = G(s)\cdot 1$$

$$s + 600 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -600$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{100}{s+600}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s+600}\right\} =$$

$$= \delta(t) - \lim_{s\to -600}\left[(s+600)\cdot\frac{100}{s+600}\cdot e^{st}\right] = \delta(t) - 100\cdot e^{-600t}$$

$$V(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s}$$

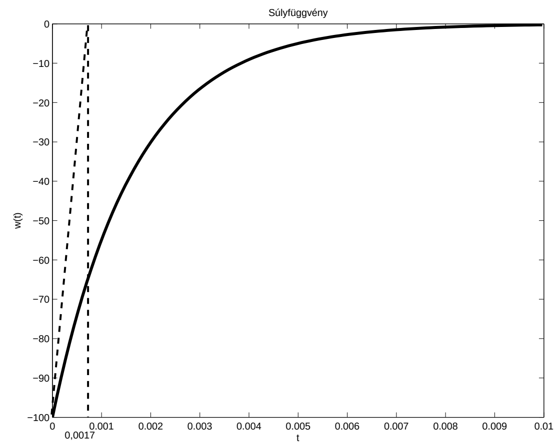
$$s(s+600) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -600$$

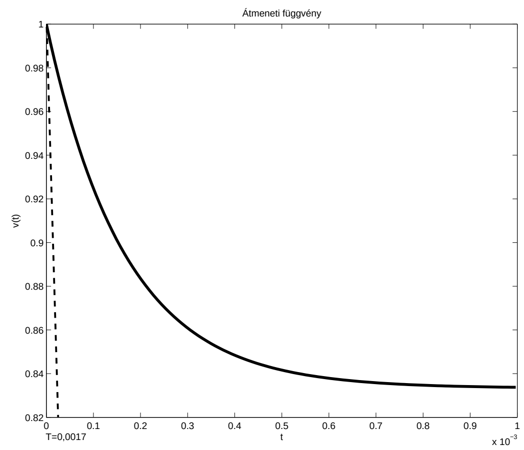
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\cdot\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s\,(s+600)}\right\} =$$

$$= 1(t) - \left\{\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{100}{s\,(s+600)}\cdot e^{st}\right] + \right.$$

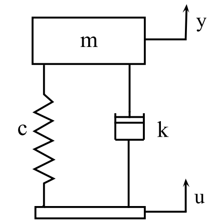
$$\left. + \lim_{s\to -600}\left[(s+600)\cdot\frac{100}{s\,(s+600)}\cdot e^{st}\right]\right\} =$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot e^{-\frac{3}{5}\cdot 10^{3}t}$$





1.2.6 Adjuk meg a rendszer átviteli függvényét!



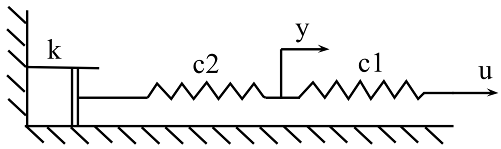
$$m\ddot{y} = c(u-y) + k(\dot{u} - \dot{y})$$
$$m\ddot{y} + cy + k\dot{y} = cu + k\dot{u}$$

Térjünk át operátortartományba.

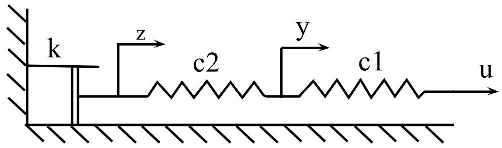
$$ms^2Y + ksY + cY = ksU + cU$$
$$(ms^2 + ks + c)Y = (ks + c)U$$
$$G = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ks + c}{ms^2 + ks + c}$$

1.2.7 Adjuk meg a rendszer átviteli függvényét!

$c_1 = 3\dfrac{N}{m}, \qquad c_2 = 2\dfrac{N}{m}, \qquad ,k = 10\dfrac{Ns}{m}$

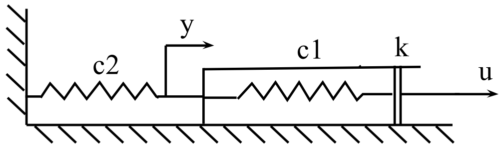


A rendszer viselkedése egy egyenlettel nem írható le, ezért bevezetjük a z ismeretlent az ábrán látható módon.



$$k\dot{z} = c_2(y - z)$$
$$c_1(u - y) = c_2(y - z)$$
$$ksZ = c_2Y - c_2Z$$
$$c_1U - c_1Y = c_2Y - c_2Z$$
$$Z = \frac{c_2Y}{ks + c_2}$$
$$c_1U - c_1Y = c_2Y - \frac{c_2^2Y}{ks + c_2}$$
$$(kc_1s + c_1c_2)U = (kc_1s + c_1c_2 + kc_2s + c_2^2 - c_2^2)Y$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{kc_1s + c_1c_2}{k(c_1 + c_2)s + c_1c_2} = \frac{30s + 6}{50s + 6}$$

1.2.8. Számítsuk ki és ábrázoljuk a rendszer súly- és átmeneti függvényét!



$$k = 50\frac{Ns}{m}, \qquad c_1 = 2\frac{N}{m}, \qquad c_2 = 3\frac{N}{m}$$

$$c_2 y = c_1(u-y) + k(\dot{u} - \dot{y})$$

$$c_2 Y = c_1 U - c_1 Y + ksU - ksY$$

$$(c_1 + c_2 + ks)Y = (c_1 + ks)U$$

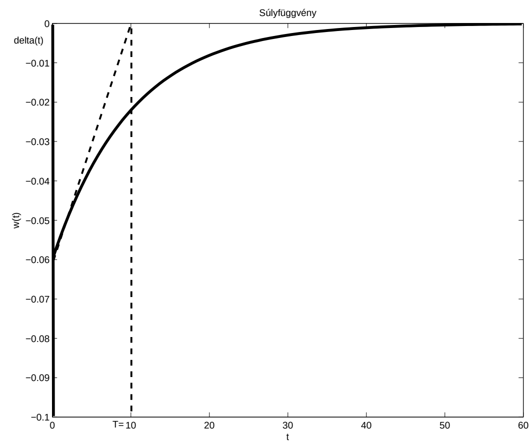
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_1 + ks}{c_1 + c_2 + ks} = \frac{50s+2}{50s+5} = 1 - \frac{3}{50s+5} = 1 - \frac{\frac{3}{50}}{s + \frac{1}{10}}$$

$$W(s) = G(s) \cdot 1$$

$$s + \frac{1}{10} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -\frac{1}{10}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{50}}{s+\frac{1}{10}}\right\} =$$

$$= \delta(t) - \lim_{s\to -\frac{1}{10}}\left[\left(s+\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{\frac{3}{50}}{\left(s+\frac{1}{10}\right)}\cdot e^{st}\right] = \delta(t) - \frac{3}{50}\cdot e^{-\frac{1}{10}t}$$



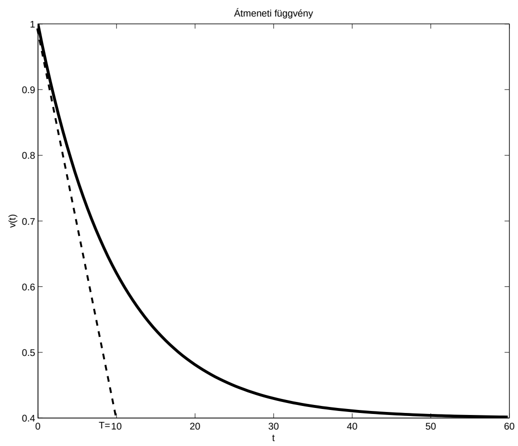
$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\left(s + \frac{1}{10}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -\frac{1}{10}, \qquad p_2 = 0$$

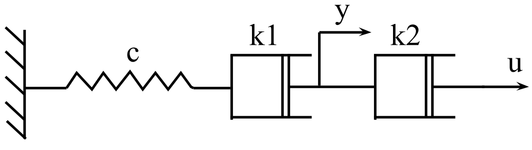
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{50}}{s\left(s + \frac{1}{10}\right)}\right\} =$$

$$= 1(t) - \left\{\lim_{s \to -\frac{1}{10}}\left[\left(s + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{\frac{3}{50}}{s\left(s + \frac{1}{10}\right)} \cdot e^{st}\right] + \lim_{s \to 0}\left[s \cdot \frac{\frac{3}{50}}{s\left(s + \frac{1}{10}\right)} \cdot e^{st}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$$

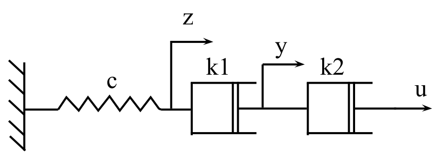


1.2.9 Határozzuk meg az alábbi rendszer átviteli, súly- és átmeneti függvényét!

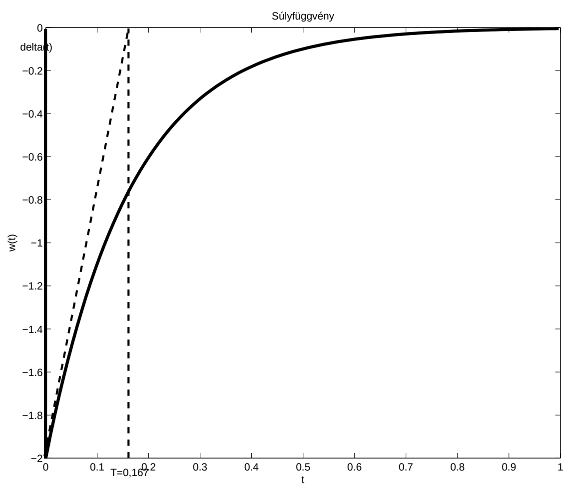


$$c = 4\frac{N}{m}, \qquad k_1 = 1\frac{Ns}{m}, \qquad k_2 = 2\frac{Ns}{m}$$

Bevezetjük a z segédváltozót.



$$cz = k_1(\dot{y} - \dot{z})$$
$$k_1(\dot{y} - \dot{z}) = k_2(\dot{u} - \dot{y})$$
$$cZ = k_1 sY - k_1 sZ$$
$$k_1 sY - k_1 sZ = k_2 sU - k_2 sY$$
$$Z = \frac{k_1 sY}{c + k_1 s}$$
$$k_1 sY - k_1 s \cdot \frac{k_1 sY}{k_1 s + c} = k_2 sU - k_2 sY$$
$$Y\left(k_1 s + k_2 s - \frac{k_1^2 s^2}{k_1 s + c}\right) = k_2 sU$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_2 s}{k_1 s + k_2 s - \dfrac{(k_1 s)^2}{c + k_1 s}} = \frac{k_1 k_2 s^2 + c k_2 s}{k_1^2 s^2 + c k_1 s + k_1 k_2 s^2 + c k_2 s - k_1^2 s^2} =$$
$$= \frac{k_1 k_2 s + c k_2}{k_1 k_2 s + c(k_1 + k_2)} = \frac{s+4}{s+6} = 1 - \frac{2}{s+6}$$
$$W(s) = G(s) \cdot 1$$
$$s + 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -6$$
$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot 1\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{2}{s+6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+6}\right\} =$$
$$= \delta(t) - \lim_{s \to -6}\left[(s+6) \cdot \frac{2}{s+6} \cdot e^{st}\right] = \delta(t) - 2 \cdot e^{-6t}$$



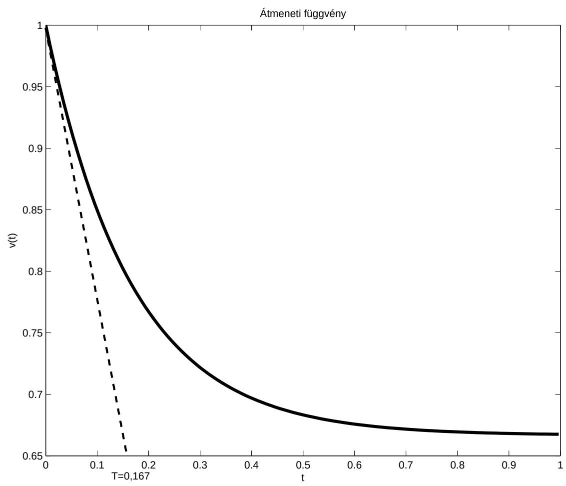
$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$s(s+6) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -6$$

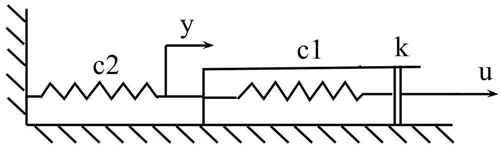
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+6)}\right\} =$$

$$= 1(t) - \left\{\lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{2}{s(s+6)} \cdot e^{st}\right] + \lim_{s\to -6}\left[(s+6) \cdot \frac{2}{s(s+6)} \cdot e^{st}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot e^{-6t}$$



1.2.10 Az alábbi adatok ismeretében határozzuk meg c_1 értékét, és írjuk fel a rendszer átviteli, súly- és átmeneti függvényét!



$$c_2 = 3\frac{N}{m}, \qquad k = 35\frac{Ns}{m}, \qquad v(t \to \infty) = 0,6$$

$$c_2 y = c_1(u - y) + k(\dot{u} - \dot{y})$$

$$c_2 Y = c_1 U - c_1 Y + ksU - ksY$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ks + c_1}{ks + c_1 + c_2}$$

A feladat megoldásához az egyik határértéktételt használjuk. Lásd [1] 258. oldal

Általánosan: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s)$

A feladatra vonatkoztatva: $\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(G(s) \cdot \frac{1}{s}\right)$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{35s + c_1}{35s + c_1 + 3} = \frac{c_1}{c_1 + 3} = 0,6 \qquad \leftarrow \text{adott}$$

$$c_1 = 4,5 \frac{N}{m}$$

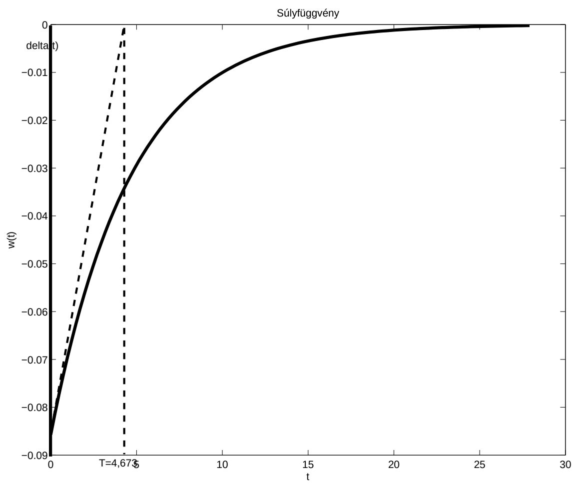
$$G(s) = \frac{35s + 4,5}{35s + 7,5} = 1 - \frac{3}{35s + 7,5} = 1 - \frac{0,086}{s + 0,214}$$

$$W(s) = G(s) \cdot 1$$

$$s + 0,214 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -0,214$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot 1\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{0,086}{s + 0,214}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,086}{s + 0,214}\right\} =$$

$$= \delta(t) - \lim_{s\to -0,214}\left[(s + 0,214) \cdot \frac{0,086}{(s + 0,214)} \cdot e^{st}\right] = \delta(t) - 0,086 \cdot e^{-0,214t}$$



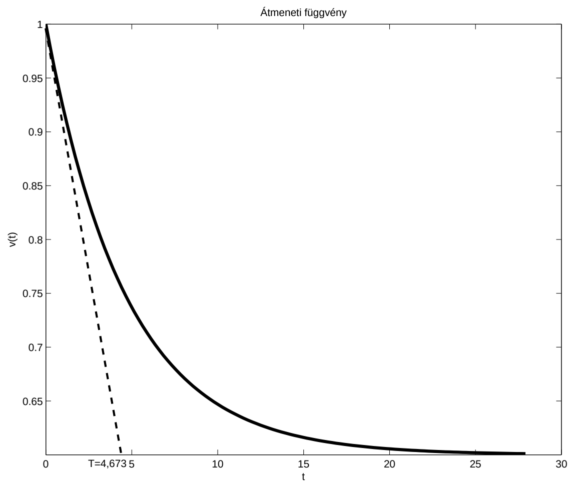
$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$s(s + 0,214) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -0,214$$

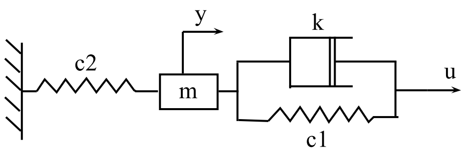
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{0,086}{s(s + 0,214)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,086}{s(s + 0,214)}\right\} =$$

$$= 1(t) - \left\{\lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{0,086}{s(s + 0,214)} \cdot e^{st}\right] + \lim_{s\to -0,214}\left[(s + 0,214) \cdot \frac{0,086}{s(s + 0,214)} \cdot e^{st}\right]\right\} =$$

$$= 1(t) - (0,401 - 0,401 \cdot e^{-0,214t}) = 0,599 + 0,401 \cdot e^{-0,214t}$$



1.2.11 Mekkora k értéke, ha $\xi = 1,2$? Határozzuk meg a rendszer súly- és átmeneti függvényét!



$$c_1 = 2\frac{N}{m}, \qquad c_2 = 3\frac{N}{m}, \qquad m = 20kg$$

$$m\ddot{y} = c_1(u-y) + k(\dot{u} - \dot{y}) - c_2 y$$

$$ms^2Y = c_1U - c_1Y + ksU - ksY - c_2Y$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ks + c_1}{ms^2 + ks + c_1 + c_2} = \frac{\frac{k}{c_1+c_2}\cdot s + \frac{c_1}{c_1+c_2}}{\frac{m}{c_1+c_2}\cdot s^2 + \frac{k}{c_1+c_2}\cdot s + 1}$$

A nevező $T^2s^2 + 2T\xi s + 1$ alakú.

$$T^2 = \frac{m}{c_1+c_2} \qquad \Longrightarrow \qquad T = 2s$$

$$2T\xi = \frac{k}{c_1+c_2} \qquad \Longrightarrow \qquad k = 24\frac{Ns}{m}$$

$$G(s) = \frac{1,2s+0,1}{s^2+1,2s+0,25}$$

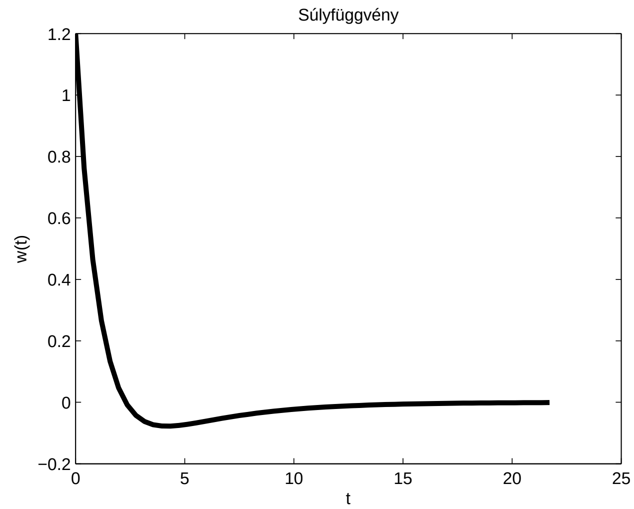
$$W(s) = G(s)\cdot 1$$

$$s^2 + 1,2s + 0,25 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad s_1 = -0,27, \qquad s_2 = -0,93$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1,2s+0,1}{(s+0,27)(s+0,93)}\right\} =$$

$$= \lim_{s\to -0,27}\left[(s+0,27)\cdot\frac{1,2s+0,1}{(s+0,27)(s+0,93)}\cdot e^{st}\right] +$$

$$+ \lim_{s\to -0,93}\left[(s+0,93)\cdot\frac{1,2s+0,1}{(s+0,27)(s+0,93)}\cdot e^{st}\right] = -0,34\cdot e^{-0,27t} + 1,54\cdot e^{-0,93t}$$



$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

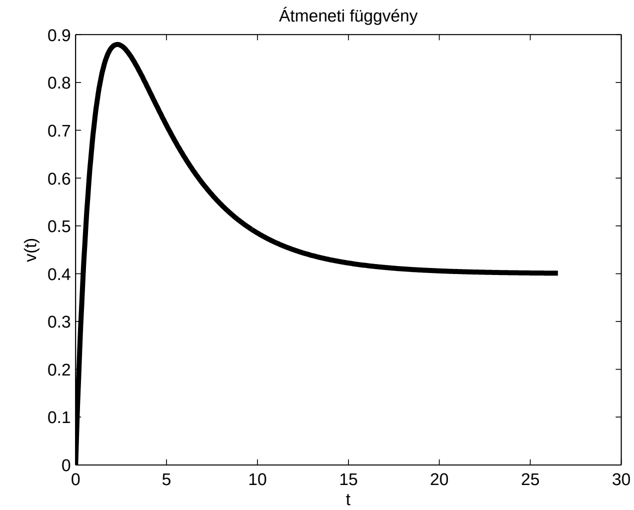
$$s(s^2 + 1,2s + 0,25) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -0,27, \qquad p_3 = -0,93$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1,2s + 0,1}{s(s^2 + 1,2s + 0,25)}\right\} = \lim_{s \to 0}\left[s \cdot \frac{1,2s + 0,1}{s(s + 0,27)(s + 0,93)} \cdot e^{st}\right] +$$

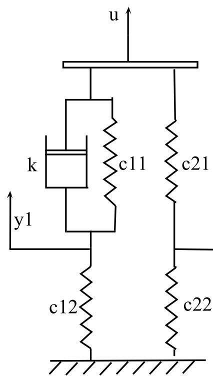
$$+ \lim_{s \to -0,27}\left[(s + 0,27) \cdot \frac{1,2s + 0,1}{s(s + 0,27)(s + 0,93)} \cdot e^{st}\right] + \lim_{s \to -0,93}\left[(s + 0,93) \cdot \frac{1,2s + 0,1}{s(s + 0,27)(s + 0,93)} \cdot e^{st}\right] =$$

$$= \frac{0,1}{0,27 \cdot 0,93} + \frac{-0,27 \cdot 1,2 + 0,1}{-0,27 \cdot (-0,27 + 0,93)} \cdot e^{-0,27t} + \frac{-0,93 \cdot 1,2 + 0,1}{-0,93 \cdot (-0,93 + 0,27)} \cdot e^{-0,93t} =$$

$$= 0,4 + 1,256 \cdot e^{-0,27t} - 1,656 \cdot e^{-0,93t}$$



1.2.12 Határozzuk meg k értékét, ha az y_1 és y_2 pontok egységugrás bemenet esetén $2s$ múlva kerülnek egymás mellé!



$$c_{11} = 2\frac{N}{m}, \qquad c_{12} = 3\frac{N}{m}, \qquad c_{21} = 3\frac{N}{m}, \qquad c_{22} = 2\frac{N}{m}$$

A bal oldalra:

$$c_{12}y_1 = c_{11}(u - y_1) + k(\dot{u} - \dot{y}_1)$$

$$c_{12}Y_1 = c_{11}U - c_{11}Y_1 + ksU - ksY_1$$

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{ks + c_{11}}{ks + c_{11} + c_{12}}$$

A jobb oldalra:

$$c_{22}y_2 = c_{21}(u - y_2)$$

$$c_{22}Y_2 = c_{21}U - c_{21}Y_2$$

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{c_{21}}{c_{21} + c_{22}}$$

A rendszer kimenete: $y = y_1 - y_2$

$$G = G_1 - G_2 = \frac{ks + c_{11}}{ks + c_{11} + c_{12}} - \frac{c_{21}}{c_{21} + c_{22}} = \frac{2ks - 5}{5ks + 25} = \frac{\frac{2}{5}s - \frac{1}{k}}{s + \frac{5}{k}}$$

$$V(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$s\left(s + \frac{5}{k}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad s_1 = 0, \qquad s_2 = -\frac{5}{k}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{5}s - \frac{1}{k}}{s\left(s + \frac{5}{k}\right)}\right\} = \lim_{s \to 0}\left[s \cdot \frac{\frac{2}{5}s - \frac{1}{k}}{s\left(s + \frac{5}{k}\right)} \cdot e^{st}\right] +$$

$$+ \lim_{s \to -\frac{5}{k}}\left[\left(s + \frac{5}{k}\right) \cdot \frac{\frac{2}{5}s - \frac{1}{k}}{s\left(s + \frac{5}{k}\right)} \cdot e^{st}\right] = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{5}{k}t}$$

$$v(t) = y(t)$$

$$-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}e^{-\frac{5}{k} \cdot 2} = 0$$

Mivel a kiírás szerint egymás mellé kerülnek, így a két pont elmozdulásának különbsége 0.

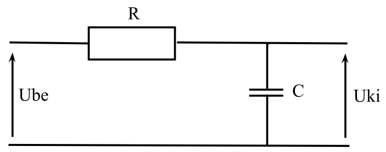
$$k = 9,10\frac{Ns}{m}$$

1.3. Rendszerek vizsgálata frekvenciatartományban

A további feladatok megoldása előtt célszerű áttanulmányozni a [3] dokumentumot az alaptagok tulajdonságairól. Jelen feladatgyűjteményben az ábrákon a(z) (alap)tagok pontos Bode-diagramjai szerepelnek. A feladatok megoldása során elegendő a töréspontos közelítést felrajzolni. Ehhez adnak támpontot az ábrákon bejelölt meredekség- és töréspontértékek.

Megjegyzés:
- *Bode-diagram* felrajzolásához az átviteli függvényt alaptagok *szorzatára* bontjuk fel.
- *Nyquist-diagram* felrajzolásához az átviteli függvényt alaptagok *összegére* bontjuk fel.

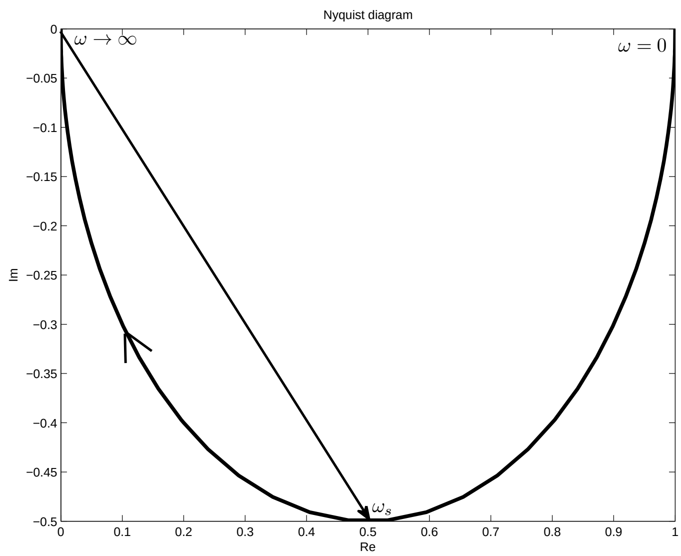
1.3.1 Határozzuk meg az alábbi négypólus átviteli függvényét! Rajzoljuk fel a Nyquist- és Bode-diagramot!

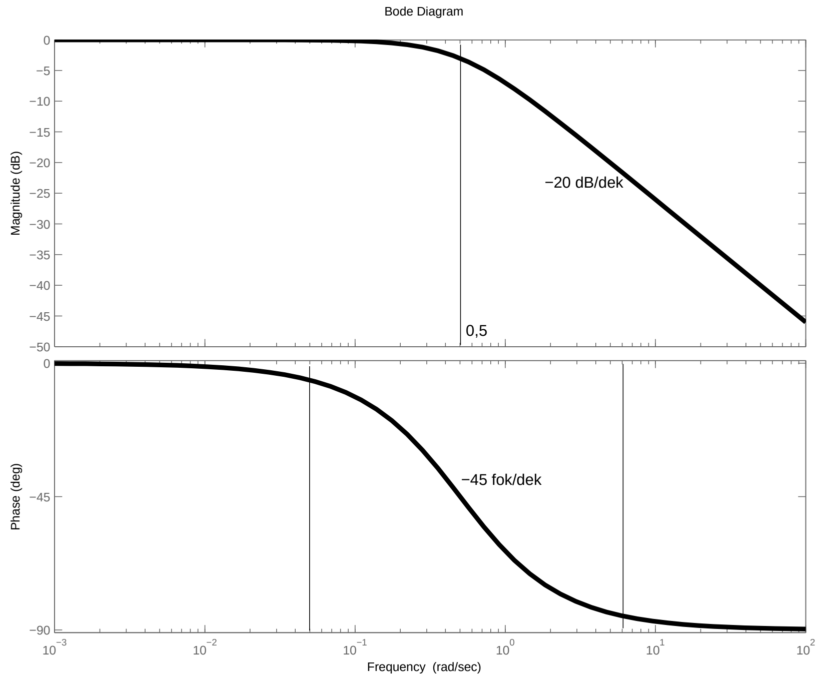


$$R_1 = 4M\Omega, \qquad C = 0,5\mu F$$

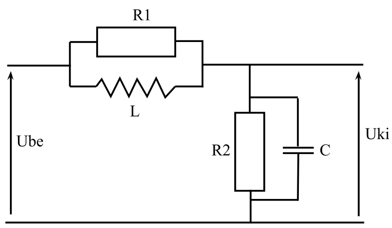
$$G(s) = \frac{Z_{ki}}{Z_{be}} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{RCs+1}{Cs}} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{2s+1}$$

A kapott átviteli függvény egy 1TP-tag átviteli függvénye.





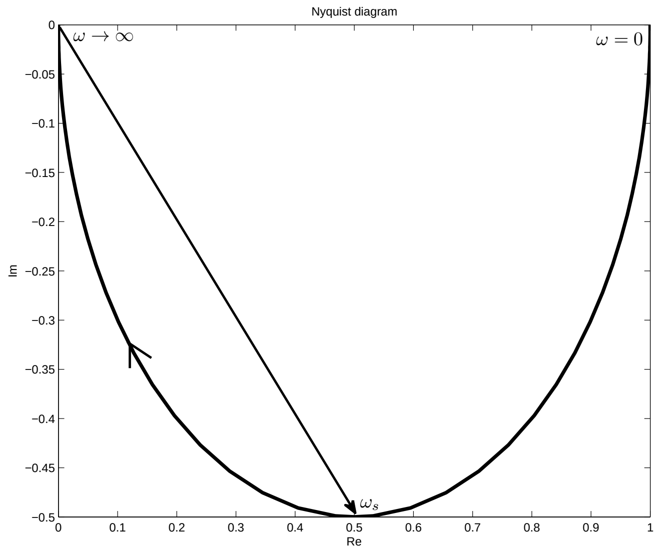
1.3.2 Adjuk meg az alábbi négypólus átviteli függvényét, Nyquist- és Bode-diagramját!

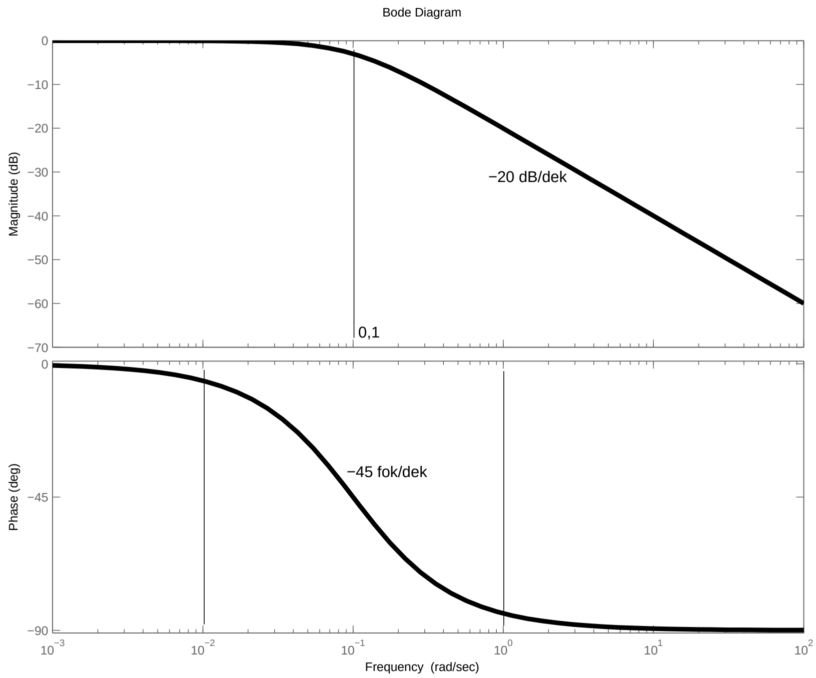


$$R_1 = 1\Omega, \qquad R_2 = 0,1\Omega, \qquad C = 10F, \qquad L = 1H$$

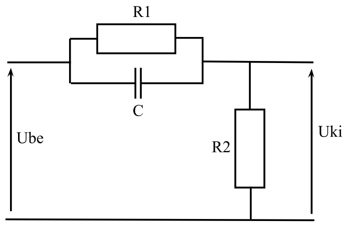
Megjegyzés: A diagramok felrajzolása előtt az átviteli függvény alaptagjait mindig időállandós alakra kell hozni.

$$G(s) = \frac{Z_{ki}}{Z_{be}} = \frac{\dfrac{\frac{R_2}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}}}{\dfrac{\frac{R_2}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}} + \dfrac{R_1 Ls}{R_1 + Ls}} = \frac{\dfrac{R_2}{R_2 Cs + 1}}{\dfrac{R_2}{R_2 Cs + 1} + \dfrac{R_1 Ls}{R_1 + Ls}} = \frac{\dfrac{0,1}{s+1}}{\dfrac{0,1}{s+1} + \dfrac{s}{s+1}} = \frac{0,1}{0,1 + s} = \frac{1}{10s + 1}$$


Nyquist diagram
$\omega \to \infty$
$\omega = 0$
ω_s
Im
Re


Bode Diagram
Magnitude (dB)
−20 dB/dek
0,1
Phase (deg)
−45 fok/dek
Frequency (rad/sec)

1.3.3 Rajzoljuk fel az alábbi négypólus Nyquist- és Bode-diagramját!



$$R_1 = 7k\Omega, \qquad R_2 = 3k\Omega, \qquad C = 1\mu F$$

$$G(s) = \frac{Z_{ki}}{Z_{be}} = \frac{R_2}{R_2 + R_1 \times \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{\frac{R_1}{Cs}}{\frac{R_1Cs+1}{Cs}}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{R_1Cs+1}} = \frac{R_2}{\frac{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}{R_1Cs+1}} =$$

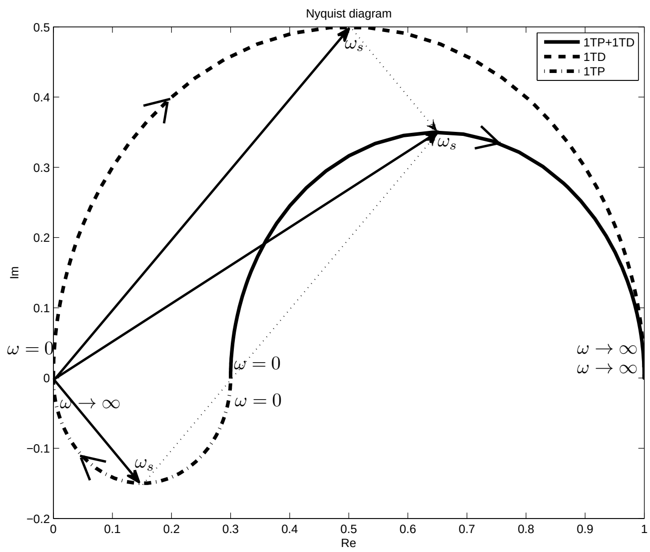
$$= \frac{R_1R_2Cs + R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2} = \frac{21s + 3000}{21s + 10000}$$

$$G(i\omega) = \frac{21i\omega + 3000}{21i\omega + 10000} = \frac{0,0021i\omega}{0,0021i\omega + 1} + \frac{0,3}{0,0021i\omega + 1}$$

Az átviteli függvényből egy 1TD és egy 1TP-tag átviteli függvényének összegét kaptuk. A diagram felrajzolásához ki kell számítani az ω_s sarok-körfrekvenciához tartozó értéket is.

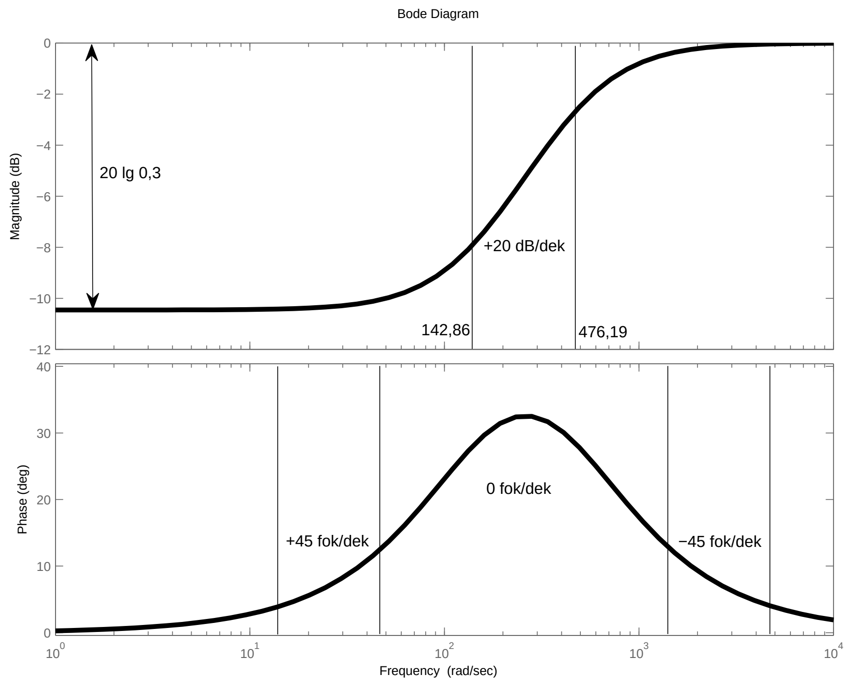
$$\text{1TD:} \qquad G(i\omega_s) = \frac{A_d}{2T} + i \cdot \frac{A_d}{2T} = 0,5 + 0,5i$$

$$\text{1TP:} \qquad G(i\omega_s) = \frac{A}{2} - i \cdot \frac{A}{2} = 0,15 - 0,15i$$

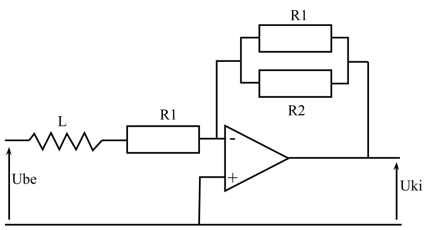


$$G(s) = \frac{21s + 3000}{21s + 10000} = 0,3 \cdot (0,007s + 1) \cdot \frac{1}{0,0021s + 1}$$

0TP PD 1TP



1.3.4 Határozzuk meg R_1 és R_2 értékét az alábbi kapcsolásban! Határozzuk meg a rendszer statikus körerősítését $1(t)$ bemenő jelre és a rendszer $G(i\omega)$ frekvenciafüggvényét! Ábrázoljuk a tag Nyquist- és Bode-diagramját!



$$R_1 = 2 \cdot R_2, \qquad L = 4H, \qquad T = 2s$$

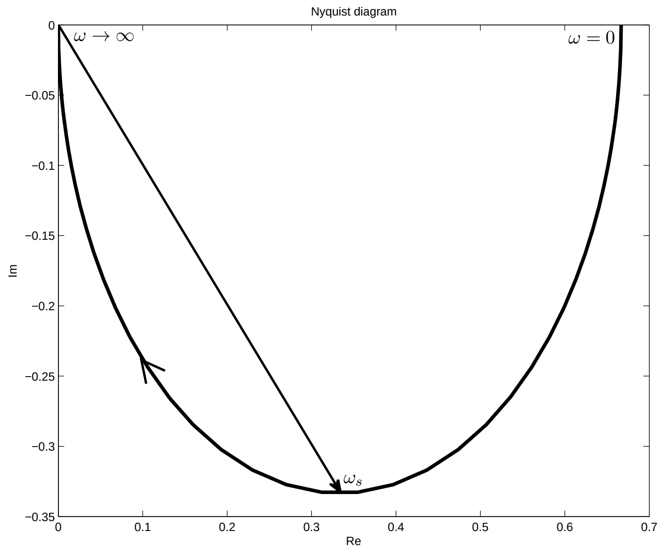
$$G(s) = \frac{Z_v}{Z_{be}} = \frac{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{Ls + R_1} = \frac{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}{\dfrac{L}{R_1}s + 1}$$

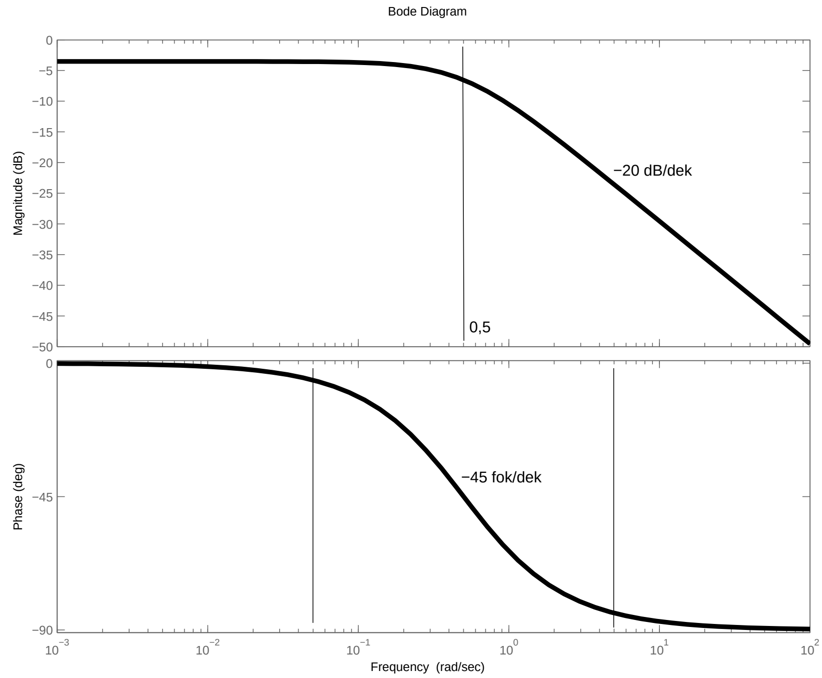
$$T = \frac{L}{R_1} \qquad \Longrightarrow \qquad R_1 = \frac{L}{T} = 2\Omega, \qquad R_2 = 2 \cdot R_1 = 4\Omega$$

$$\lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

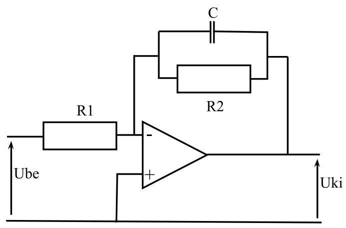
$$A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}$$

$$G(i\omega) = \frac{\dfrac{2}{3}}{2i\omega + 1}$$





1.3.5 Határozzuk meg az alábbi négypólus átviteli függvényét! Mekkora C értéke, ha a kapcsolás időállandója $\frac{1}{750}s$? Ábrázoljuk a rendszer Nyquist- és Bode-diagramját!



$$R_1 = 5k\Omega, \qquad R_2 = 10k\Omega$$

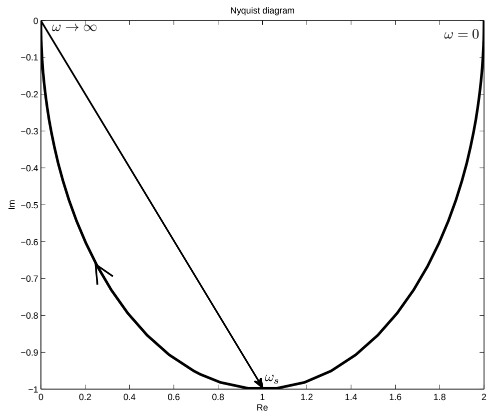
$$G(s) = \frac{Z_v}{Z_{be}} = \frac{R_2 \times \frac{1}{Cs}}{R_1} = \frac{\frac{\frac{R_2}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}}}{R_1} = \frac{\frac{\frac{R_2}{Cs}}{\frac{R_2Cs+1}{Cs}}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1R_2Cs + R_1} = \frac{2}{10^4Cs+1}$$

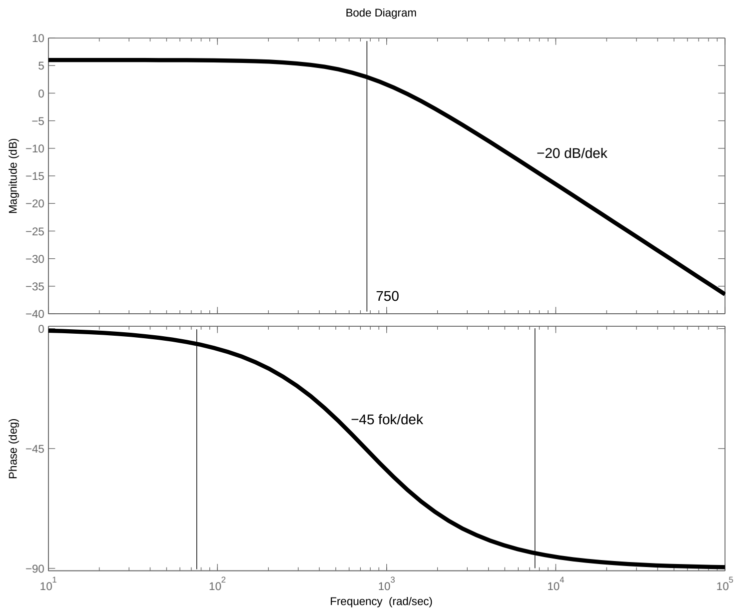
A rendszer egy 1TP taggal modellezhető, melynek átviteli függvénye: $G(s) = \frac{A}{Ts+1}$

$$T = 10^4 C = \frac{1}{750}$$

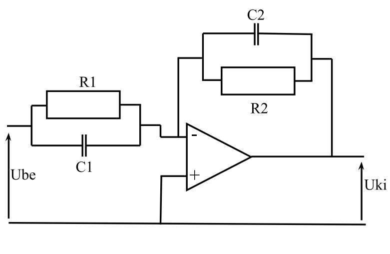
$$C = 0,13\mu F$$

$$G(s) = \frac{2}{0,13 \cdot 10^{-2}s + 1}$$





1.3.6 Határozzuk meg R_2, C_1, C_2 értékét, ha $v(t=0)=5$, $v(t\to\infty)=2$ és $T=3s$! Írjuk fel a négypólus átviteli függvényét, frekvenciafüggvényét! Rajzoljuk fel a Nyquist- és Bode-diagramokat!



$$R_1 = 1M\Omega$$

$$G(s)=\frac{Z_v}{Z_{be}}=\frac{R_2\times\frac{1}{C_2s}}{R_1\times\frac{1}{C_1s}}=\frac{\frac{\frac{R_2}{C_2s}}{R_2+\frac{1}{C_2s}}}{\frac{\frac{R_1}{C_1s}}{R_1+\frac{1}{C_1s}}}=\frac{\frac{R_2}{R_2C_2s+1}}{\frac{R_1}{R_1C_1s+1}}=\frac{R_1R_2C_1s+R_2}{R_1R_2C_2s+R_1}=\underset{\text{0TP}}{\frac{R_2}{R_1}}\cdot\underset{\text{PD}}{(R_1C_1s+1)}\cdot\underset{\text{1TP}}{\frac{1}{R_2C_2s+1}}$$

$$V(s)=G(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\cdot\frac{1}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_1C_1s+1}{s(R_2C_2s+1)}\right\}$$

$$R_1s(R_2C_2s+1)=0\qquad\Longrightarrow\qquad p_1=0,\qquad p_2=-\frac{1}{R_2C_2}$$

$$v(t)=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_1C_1s+1}{s(R_2C_2s+1)}\cdot e^{st}\right]+$$

$$+\lim_{s\to-\frac{1}{R_2C_2}}\left[\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)\cdot\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_1C_1s+1}{sR_2C_2\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}\cdot e^{st}\right]=$$

$$=\frac{R_2}{R_1}+\left(\frac{C_1}{C_2}-\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot e^{-\frac{1}{R_2C_2}t}$$

$$v(t=0)=\frac{C_1}{C_2}=5$$

$$v(t\to\infty)=\frac{R_2}{R_1}=2$$

$$R_2=2\cdot R_1=2M\Omega$$

$$T=R_2C_2=3s$$

$$C_2=1,5\mu F$$

$$C_1=5\cdot C_2=7,5\mu F$$

$$G(s)=2\cdot\frac{7,5s+1}{3s+1}$$

$$G(i\omega)=2\cdot\frac{7,5i\omega+1}{3i\omega+1}$$

$$G(s)=\frac{15s}{3s+1}+\frac{2}{3s+1}$$

$$G(s)=2\cdot(7,5s+1)\cdot\frac{1}{3s+1}$$

Megjegyzés: a feladat a határértéktétellel is megoldható:

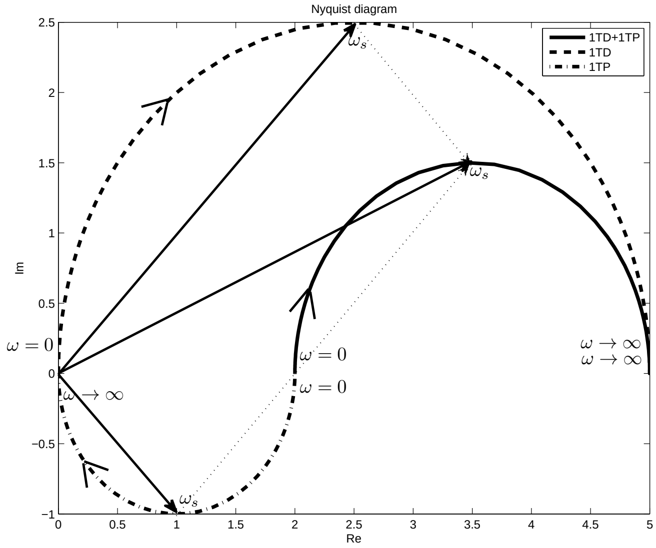
$$\lim_{t\to 0}v(t)=\lim_{s\to\infty}s\cdot V(s)=\lim_{s\to\infty}G(s)=\frac{C_1}{C_2}=5$$

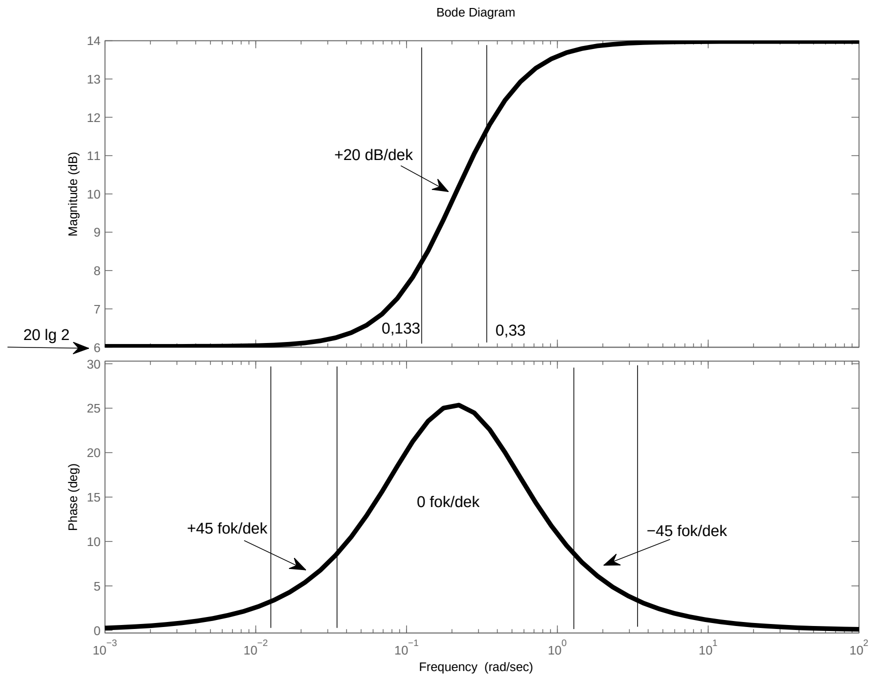
$$\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{s\to 0}G(s)=\frac{R_2}{R_1}=2$$

$$R_2=2M\Omega$$

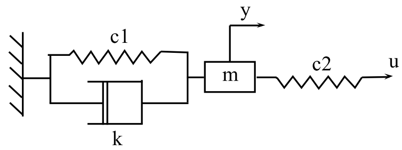
$$R_2C_2=3\qquad\Longrightarrow\qquad C_2=1,5\mu F$$

$$C_1=7,5\mu F$$


Nyquist diagram
1TD+1TP
1TD
1TP
Im
Re
$\omega = 0$
$\omega \to \infty$
ω_s
ω_s
ω_s
$\omega = 0$
$\omega = 0$
$\omega \to \infty$
$\omega \to \infty$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
+20 dB/dek
0,133
0,33
20 lg 2
Phase (deg)
0 fok/dek
+45 fok/dek
−45 fok/dek
Frequency (rad/sec)

1.3.7 Rajzoljuk fel a rendszer Bode-diagramját!



$$m = 2kg, \qquad k = 12\frac{Ns}{m}, \qquad c_1 = 6\frac{N}{m}, \qquad c_2 = 4\frac{N}{m}$$

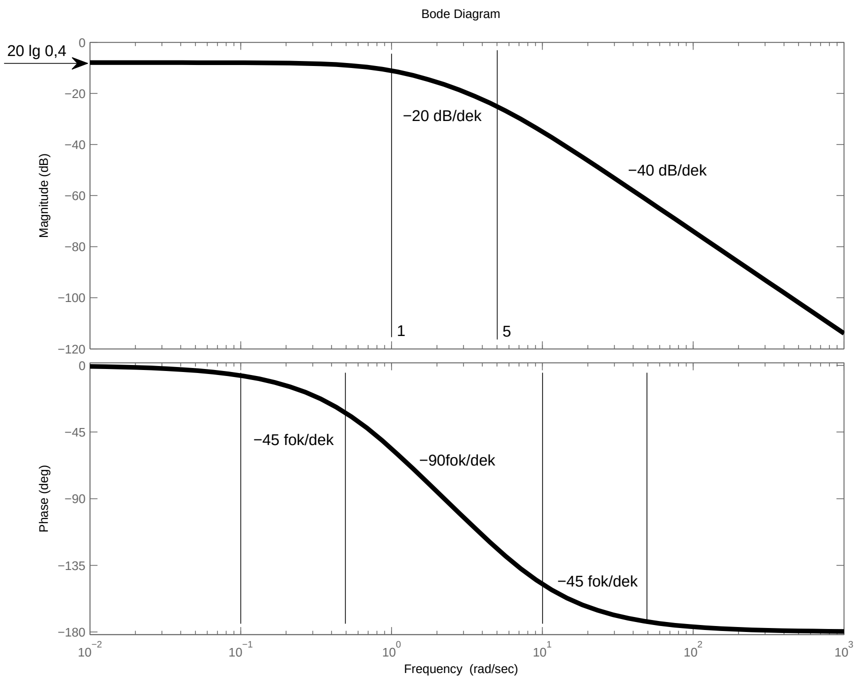
$$m\ddot{y} = c_2(u-y) - k\dot{y} - c_1 y$$

$$ms^2Y = c_2U - c_2Y - ksY - c_1Y$$

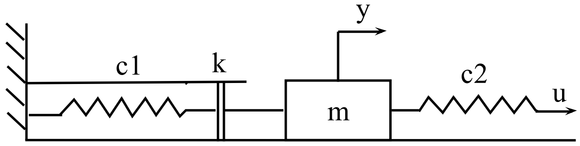
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_2}{ms^2 + ks + c_1 + c_2} = \frac{2}{s^2+6s+5} = \frac{2}{(s+1)(s+5)} =$$

$$= \frac{2}{s+1}\cdot\frac{1}{5\left(\frac{1}{5}s+1\right)} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}s+1}$$

0TP 1TP 1TP



1.3.8 Adott az alábbi mechanikai elrendezés. Határozzuk meg a $G(s)$ átviteli függvényt! Mekkora k csillapítás esetén lesz a rendszer az aperiodikus határhelyzetben? Növeljük meg az aperiodikus határhelyzethez tartozó csillapító értékét 1,5-szeresére! Rajzoljuk fel a tag Bode-diagramját az új csillapítással!



$$c_1 = 5\frac{N}{m}, \qquad c_2 = 10\frac{N}{m}, \qquad m = 4kg$$

A rendszer aperiodikus határhelyzetben van, ha $\xi = 1$.

$$m\ddot{y} = c_2(u-y) - k\dot{y} - c_1 y$$
$$ms^2Y = c_2(U-Y) - ksY - c_1Y$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_2}{ms^2+ks+c_1+c_2} = \frac{\dfrac{c_2}{c_1+c_2}}{\dfrac{m}{c_1+c_2}s^2 + \dfrac{k}{c_1+c_2}s+1}$$

A nevező $T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$ alakú.

$$T^2 = \frac{m}{c_1+c_2} = 0,27 \qquad \Longrightarrow \qquad T = 0,52$$

$$2\xi T = \frac{k}{c_1+c_2}$$

$$k = 2\xi T(c_1+c_2) = 2\cdot 1\cdot 0,52\cdot 15 = 15,6\frac{Ns}{m}$$

$$G(s) = \frac{10}{4s^2+15,6s+15}$$

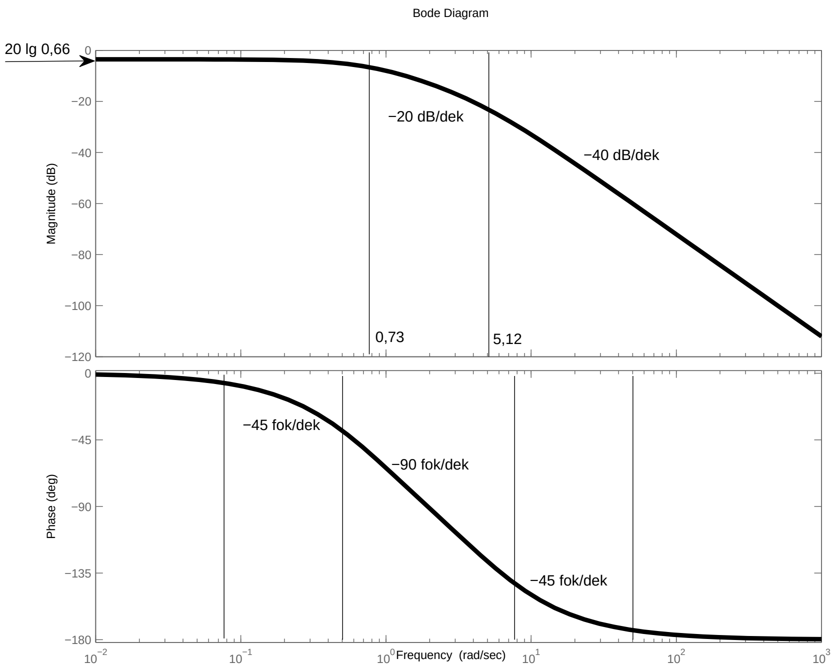
$$k' = 1,5\cdot k = 1,5\cdot 15,6 = 23,5\frac{Ns}{m}$$

$$G'(s) = \frac{10}{4s^2+23,4s+15}$$

$$4s^2+23,4s+15 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -5,1172, \qquad p_2 = -0,7328$$

$$G'(s) = 0,667\cdot\frac{1}{0,1957s+1}\cdot\frac{1}{1,364s+1}$$

0TP 1TP 1TP

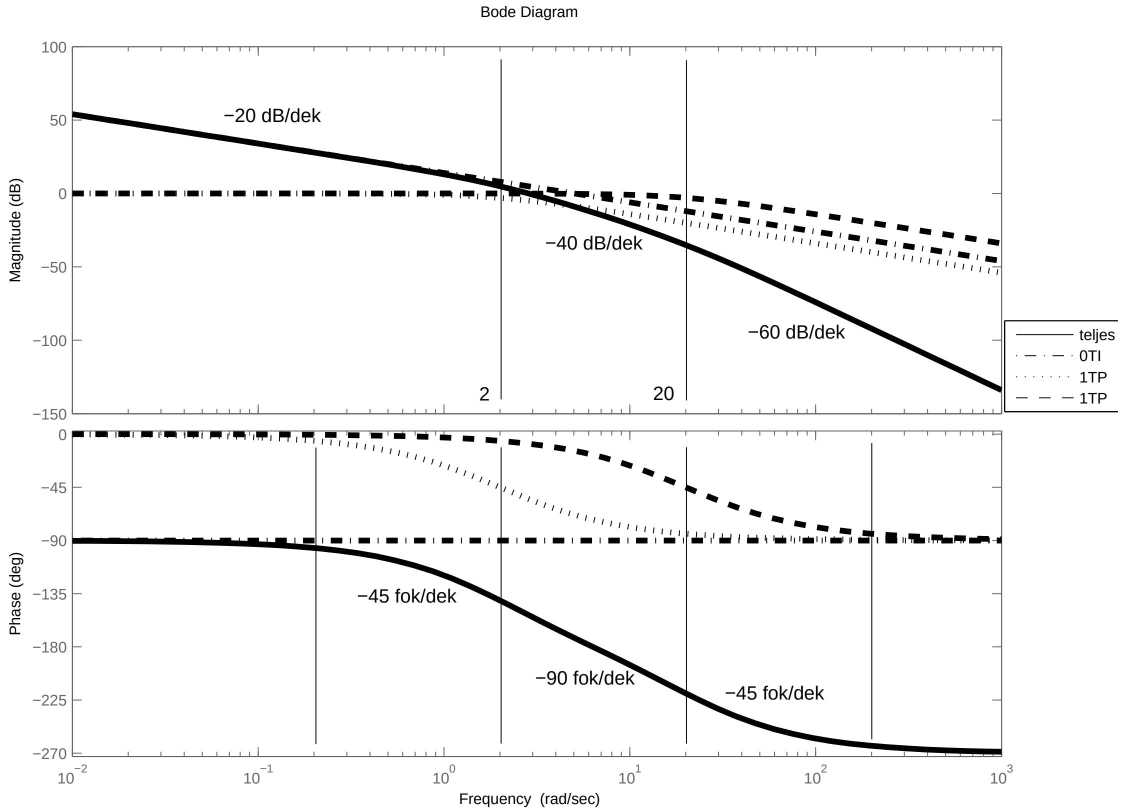


1.4. Soros kompenzálás

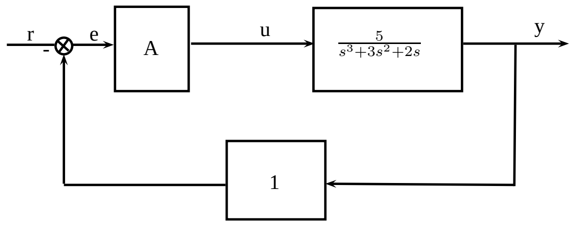
Fontos megjegyzés:
Jelen feladatgyűjteményben a diagramokon az alaptagok pontos Bode-diagramja szerepel. A feladatok papíron történő megoldásakor csak az aszimptotákat kell felrajzolni.Emiatt az eltolás nagysága nagy valószínűséggel el fog térni az itt közöltektől. A legfontosabb a feladatok megoldásában a helyes elv alkalmazása. (Nagy eltérés akkor keletkezik, ha az adott fázistartalékhoz tartozó amplitudó diagrammetszék a töréspont közelében van.)

1.4.1 Alakítsuk át az alábbi átviteli függvényt alaptagok szorzatára, majd ábrázoljuk a Bode-diagramot!

$$G(s) = \frac{5}{0,025s^3 + 0,55s^2 + s} = \underset{0\mathrm{TI}}{\frac{5}{s}} \cdot \underset{1\mathrm{TP}}{\frac{1}{\frac{1}{2}s + 1}} \cdot \underset{1\mathrm{TP}}{\frac{1}{\frac{1}{20}s + 1}}$$



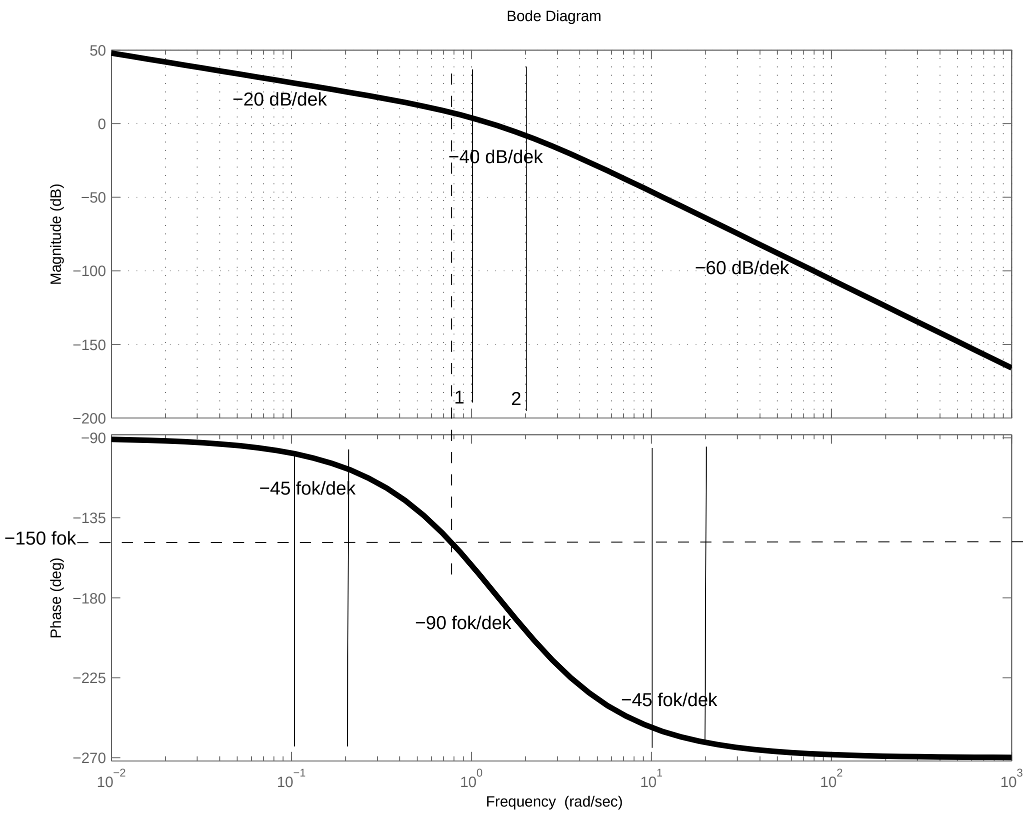
1.4.2 Tervezzünk soros arányos kompenzátort lin-log papíron a következő rendszerre!



$$G(s) = \frac{5}{s^3+3s^2+2s} \qquad \varphi_t = 30°$$

$$A = 1 \text{ esetén } G_H(s) = G(s)$$

$$G(s) = \frac{5}{s^3+3s^2+2s} = \underset{0\text{TI}}{\frac{2,5}{s}} \cdot \underset{1\text{TP}}{\frac{1}{s+1}} \cdot \underset{1\text{TP}}{\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}}$$



$$X = 7,5 \text{ (lefelé kell tolni)}$$

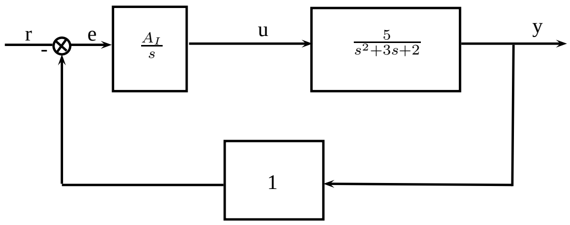
$$20 \cdot \lg A = -X$$

$$20 \cdot \lg A = -7,5$$

$$A = 0,42$$

A soros arányos kompenzátor erősítése 0,42.

1.4.3 Tervezzünk jelkövetést és 30°-os fázistartalékot biztosító soros kompenzátort a következő rendszerre!



$$G(s) = \frac{5}{s^2+3s+2}$$

A jelkövetés csak akkor valósul meg, ha a felnyitott hurok integráló tulajdonságú, vagy a nem integráló típusú rendszert integráló tulajdonságú szabályozóval látjuk el. A példában adott rendszer nem integráló. Először bizonyítjuk, hogy arányos kompenzátort alkalmazva nem teljesül a jelkövetés.

$$A = 1 \text{ esetén } G(s) = G_H(s) = \frac{5}{s^2+3s+2}$$

$$A = A \text{ esetén:}$$

$$Y(s) = \frac{G(s)\cdot C(s)}{1+G(s)\cdot C(s)}\cdot R(s) = \frac{\frac{5}{s^2+3s+2}\cdot A}{1+\frac{5}{s^2+3s+2}\cdot A}\cdot R(s) = \frac{5A}{s^2+3s+2+5A}\cdot R(s) = G_z(s)\cdot R(s)$$

$$\text{Határértéktétel: } \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot G(s)$$

$$u(t) = 1(t) \text{ esetén } U(s) = \frac{1}{s}, Y(s) = \frac{1}{s}\cdot G(s)$$

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot G_z(s) = \lim_{s\to 0}\frac{5A}{2+5A}\cdot R(s)$$

$$\frac{5A}{2+5A} \neq 1 \qquad A\in\mathbb{R}, \qquad A \geq 0$$

Így ebben az esetben nem teljesülhet a jelkövetés.
Integráló tulajdonságú kontrollert alkalmazva:

$$C = \frac{A_I}{s} \text{ esetén:}$$

$$Y(s) = \frac{G(s)\cdot C(s)}{1+G(s)\cdot C(s)}\cdot R(s) = \frac{\frac{5}{s^2+3s+2}\cdot\frac{A_I}{s}}{1+\frac{5}{s^2+3s+2}\cdot\frac{A_I}{s}} = \frac{5A_I}{s^3+3s^2+2s+5A_I}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{5A_I}{s^3+3s^2+2s+5A_I} \cdot R(s) = R(s)$$

Ebben az esetben teljesül a jelkövetés.

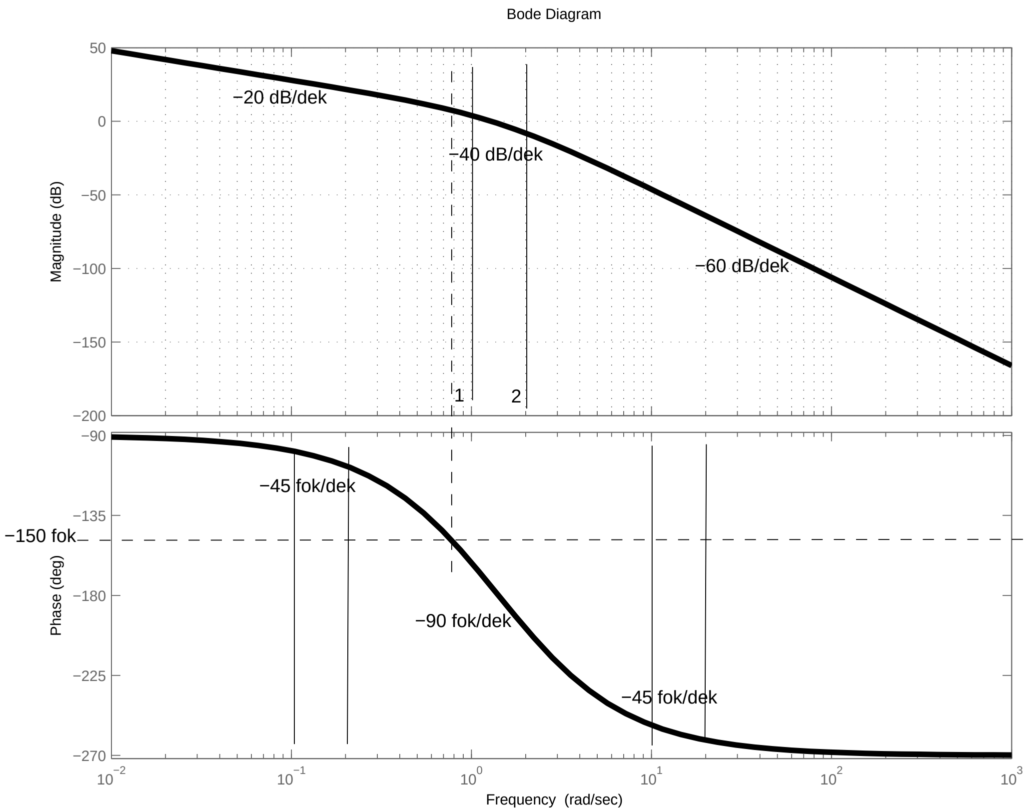
A fázistartalék biztosítása:

$$G_H(s) = G(s)\cdot C(s) = \frac{5}{s^2+3s+2}\cdot\frac{A_I}{s} = \frac{5}{(s^2+3s+2)s}\cdot A_I$$

$A = 1$ esetre a feladat megoldása az 1.4.2-essel egyezik meg.
Megjegyzés: integráló kompenzátor alkalmazása esetén a $C(s)$ nevezőjében lévő s-et hozzáírjuk a felnyitott hurok átviteli függvényéhez, és ezt tekintjük a továbbiakban G(s)-nek, így a feladatot visszavezettük soros arányos kompenzátor keresésére.

$$A_I = 1 \text{ esetén } G_H(s) = G(s)$$

$$G(s) = \frac{5}{s^3+3s^2+2s} = \underbrace{\frac{2,5}{s}}_{\text{0TI}}\cdot\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\text{1TP}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}}_{\text{1TP}}$$



$$X = 7,5 \text{ (lefelé kell tolni)}$$

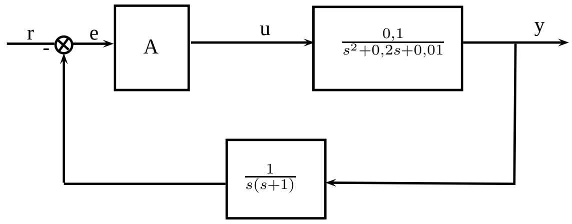
$$20\cdot\lg A_I = -X$$

$$20\cdot\lg A_I = -7,5$$

$$A_I = 0,42$$

A soros arányos kompenzátor erősítése 0,42.

1.4.4 Minimum 30°-os fázistartalék biztosításához melyik kompenzátort kell használni az alább megadott rendszerre?

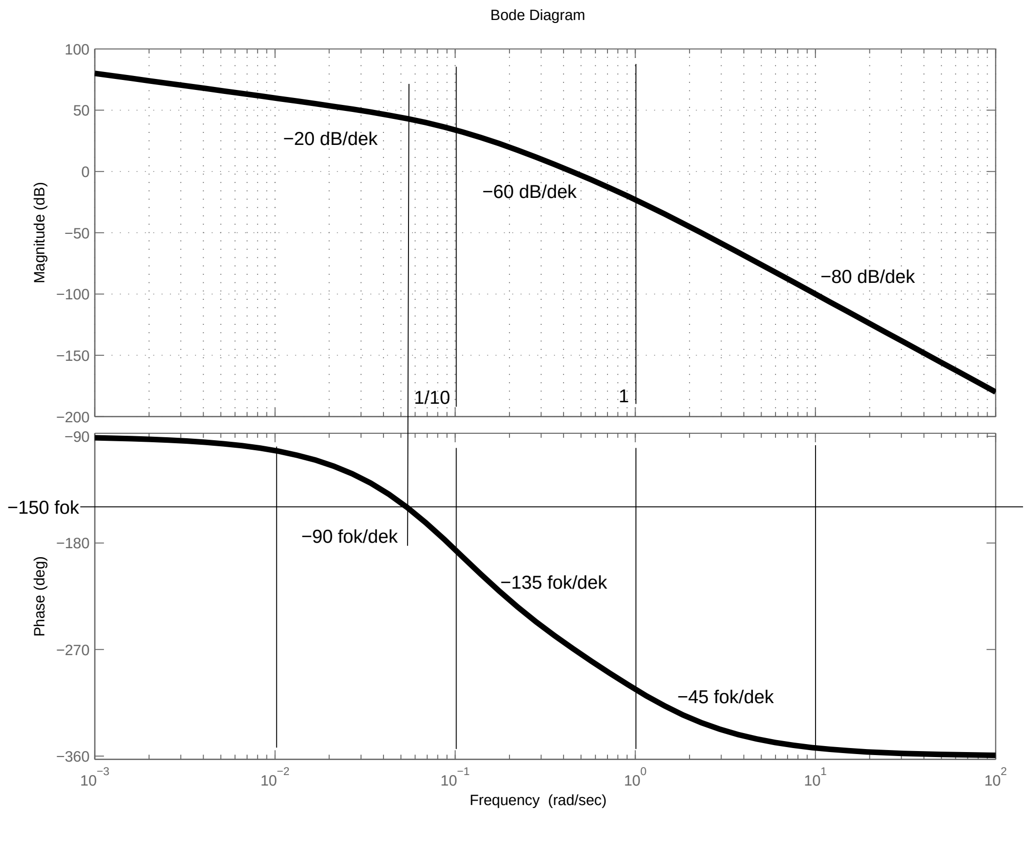


$$G(s) = \frac{0,1}{s(s+1)(s^2+0,2s+0,01)} \qquad A_1 = 0,01 \qquad A_2 = 0,001$$

A feladatot általánosan oldjuk meg.

$A = 1$kompenzátort alkalmazva:

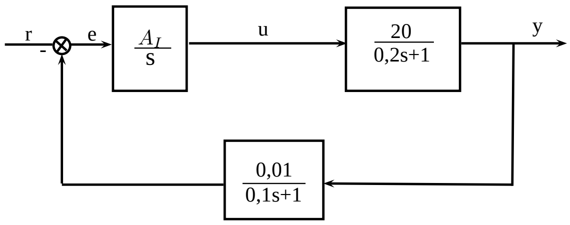
$$G(s) = \frac{0,1}{s(s+1)(s^2+0,2s+0,01)} = \underbrace{\frac{10}{s}}_{0\text{TI}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{1\text{TP}} \cdot \underbrace{\frac{1}{10s+1}}_{1\text{TP}} \cdot \underbrace{\frac{1}{10s+1}}_{1\text{TP}}$$



$$X = 44 \text{ (lefelé kell tolni)}$$
$$20 \cdot \lg A = -X$$
$$20 \cdot \lg A = -44$$
$$A = 0,0063$$

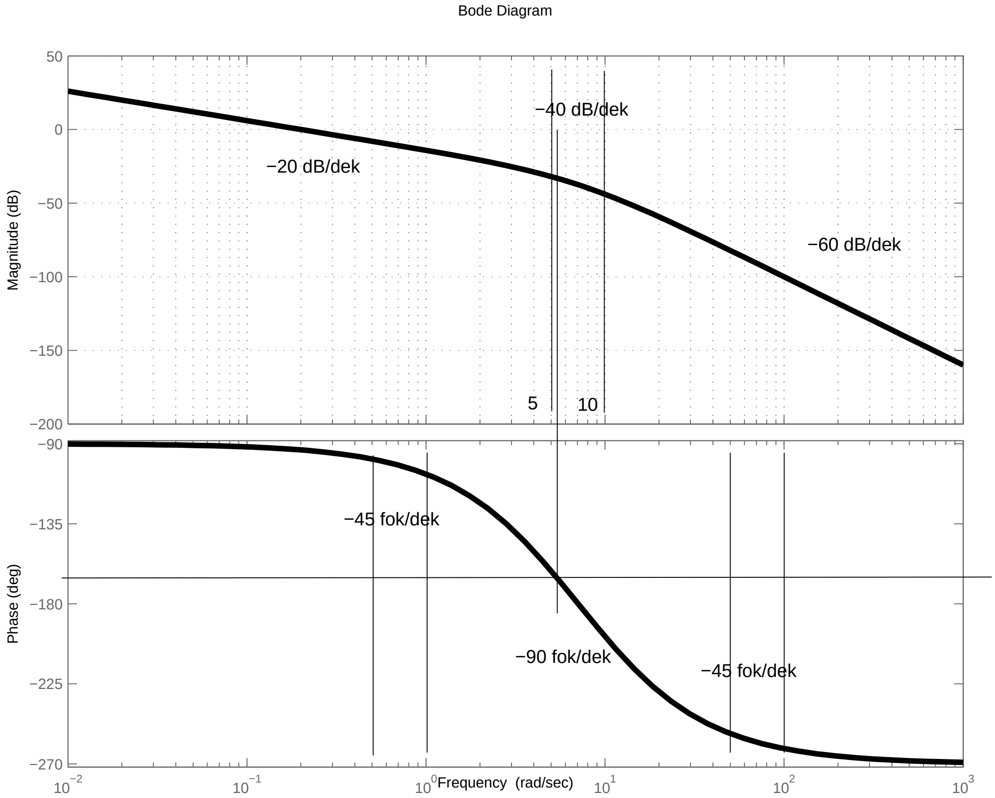
Az A_2 kompenzátort kell használni, csak ezzel biztosítható az adott fázistartalék.

1.4.5 Tervezzünk 30°-os fázistartalékot biztosító soros integráló kompenzátort az ábrán látható rendszerre!

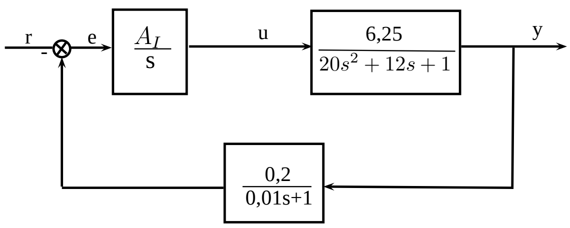


$$G_H(s) = \frac{0,2A_I}{s} \cdot \frac{1}{0,2s+1} \cdot \frac{1}{0,1s+1}$$
$$A_I = 1 \text{ esetben: } G_H(s) = \frac{0,2}{s} \cdot \frac{1}{0,2s+1} \cdot \frac{1}{0,1s+1}$$
$$G_H(s) = \underbrace{\frac{0,2}{s}}_{\text{0TI}} \cdot \underbrace{\frac{1}{0,2s+1}}_{\text{1TP}} \cdot \underbrace{\frac{1}{0,1s+1}}_{\text{1TP}}$$

$$X = -28,6 \text{ (felfelé kell tolni)}$$
$$20 \cdot \lg A = -X$$
$$20 \cdot \lg A = 28,6$$
$$A = 26,92$$



1.4.6 Tervezzünk soros integráló kompenzátort, amely biztosítja a $\varphi_t = 30°$-os fázistartalékot! Mekkora a T_{sz} szabályozási idő? Határozzuk meg $y(\infty)$ értékét, ha $r = 2$! Mekkora állandósult állapotban az e szabályozási eltérés?



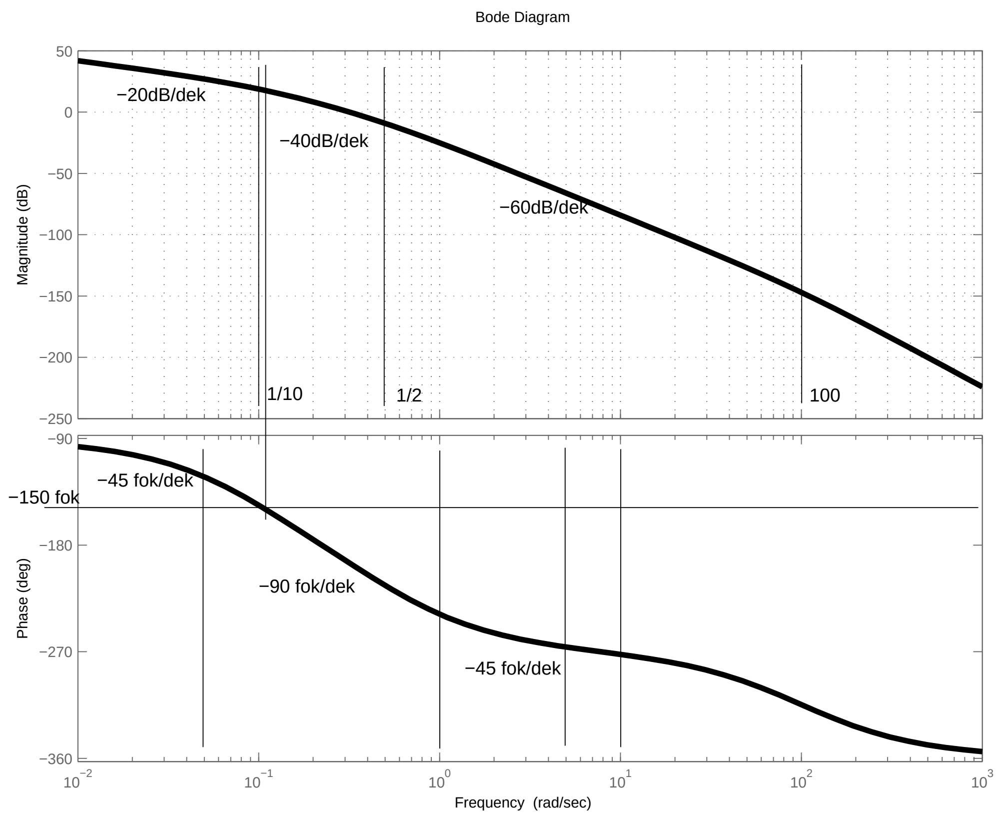
$$20s^2 + 12s + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0,5, \qquad p_2 = 0,1$$

$$G_H(s) = \frac{A_I}{s} \cdot \frac{6,25}{20(s+0,5)(s+0,1)} \cdot \frac{0,2}{0,01s+1} = \frac{1,25A_I}{s(2s+1)(10s+1)(0,01s+1)}$$

$$A_I = 1 \text{ esetben:}$$

$$G_H(s) = \frac{1,25}{s} \cdot \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{0,01s+1}$$

$$\text{0TI} \quad \text{1TP} \quad \text{1TP} \quad \text{1TP}$$



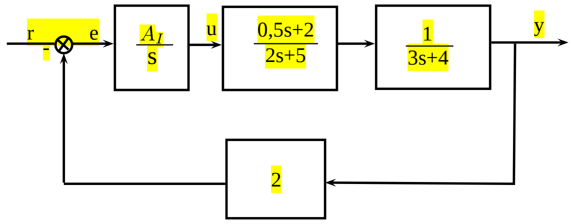
$$X = 17,4 \text{ (lefelé kell tolni)}$$
$$20 \cdot \lg A = -X$$
$$20 \cdot \lg A = -17,4$$
$$A = 0,135$$

A vágási körfrekvencia: $\omega_c = 0,11\frac{1}{s}$
Ebből a szabályozási idő:

$$\frac{\pi}{\omega_c} \leq T_{sz} \leq \frac{3\pi}{\omega_c}$$
$$28,56s \leq T_{sz} \leq 85,68s$$

A szabályozott rendszer integráló tulajdonságú, így a jelkövetés biztosított, azaz $e = 0$
Tudjuk, hogy ha $t \to \infty$, akkor s $\to 0$ és $r = 2$.
$\lim_{s\to 0} \dfrac{0,2}{0,01s+1} = 0,2$,
így $e = 0 = r - 0,2y_\infty$
A kimenet az állandósult állapotban: y_∞=10

1.4.7 Tervezzünk soros integráló kompenzátort, amely biztosítja a $\varphi_t = 30°$-os fázistartalékot! Mekkora a T_{sz} szabályozási idő? Határozzuk meg $y(\infty)$ értékét, ha $r = 2$! Mekkora állandósult állapotban az e szabályozási eltérés?

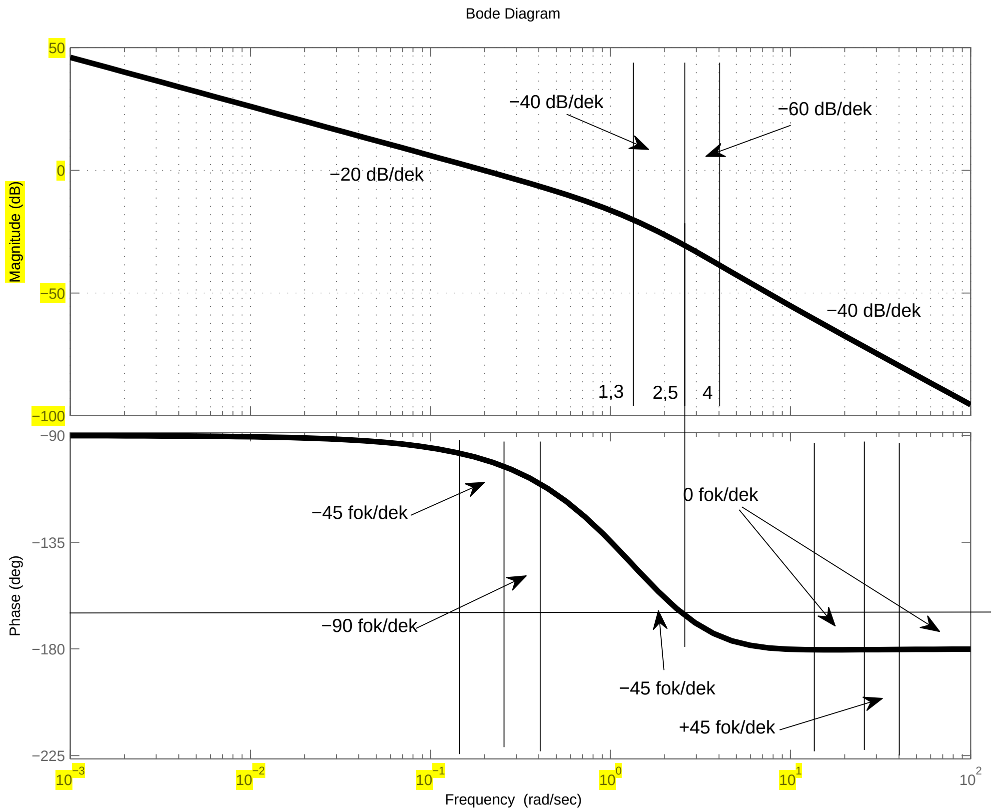


$$G_H(s) = \frac{A_I}{s} \cdot \frac{2}{5} \cdot (1 + 0,25s) \cdot \frac{1}{0,4s+1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0,75s+1} \cdot 2$$

$A_I = 1$ esetben:

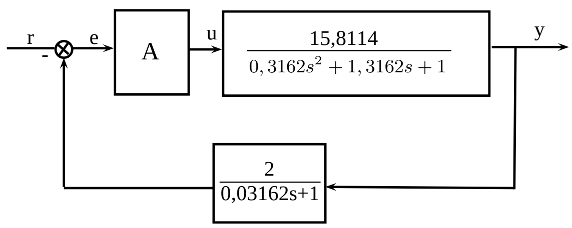
$$G_H(s) = \frac{0,2}{s} \cdot (1 + 0,25s) \cdot \frac{1}{0,4s+1} \cdot \frac{1}{0,75s+1}$$

0TI PD 1TP 1TP



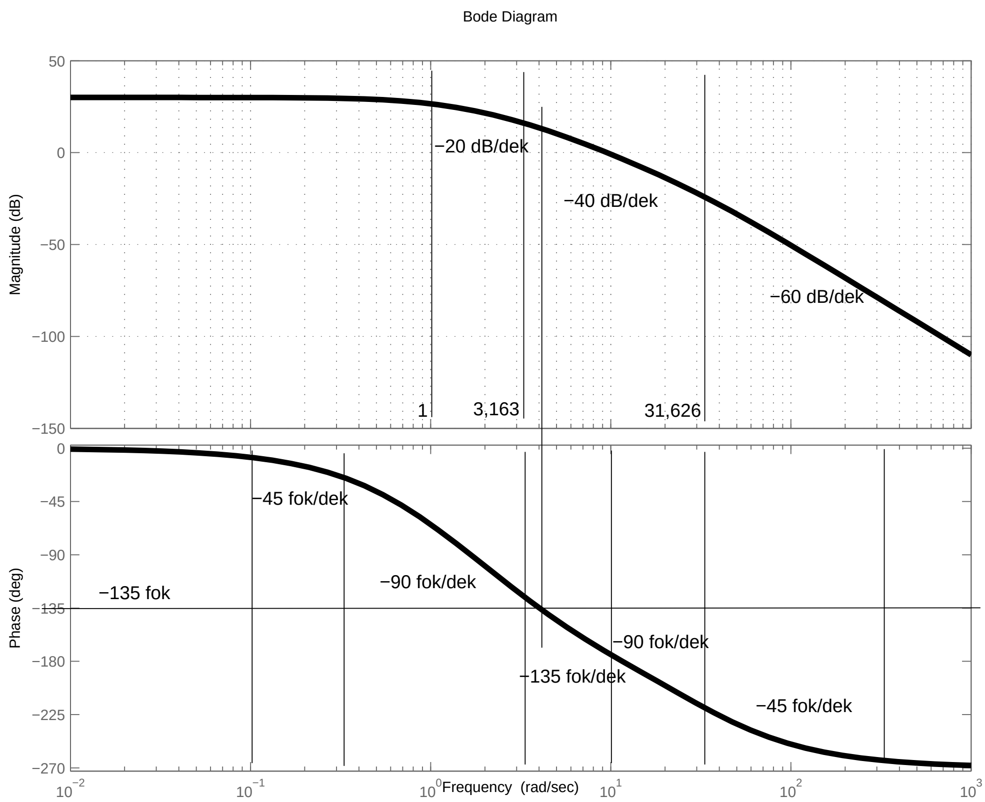
$$X = -29,5 \text{ (felfelé kell tolni)}$$
$$20 \cdot \lg A = -X$$
$$20 \cdot \lg A = 29,5$$
$$A = 29,85$$
$$\text{A vágási körfrekvencia: } \omega_c = 2,5\frac{1}{s}$$
$$\text{Ebből a szabályozási idő:} \frac{\pi}{\omega_c} \leq T_{sz} \leq \frac{3\pi}{\omega_c}$$
$$1,26s < T_{sz} < 3,77s$$
Ez a rendszer is integráló tulajdonságú, így $e = 0$.
$$0 = e = r - 2y_\infty$$
Felhasználva, hogy $r = 2$, $y_\infty = 1$

1.4.8 Tervezzünk soros arányos kompenzátort a megadott rendszerre, amely $\varphi_t = 45°$-os fázistartalékot biztosít! Határozzuk meg az állandósult állapotbeli hibát (e_∞), ha $r = 2$!



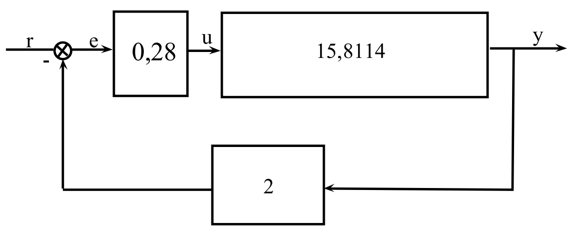
$$G_H(s) = A \cdot \frac{15,8114}{0,3162s^2 + 1,3162s + 1} \cdot \frac{2}{0,03162s + 1}$$
$$A = 1 \text{ esetben}$$
$$G_H(s) = 31,6228 \cdot \frac{1}{0,3162s + 1} \cdot \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{1}{0,03162s + 1}$$

0TP 1TP 1TP 1TP



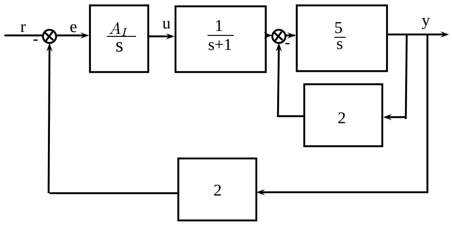
$$X = 11,11 \text{ (lefelé kell tolni)}$$
$$20 \cdot \lg A = -X$$
$$20 \cdot \lg A = -11,11$$
$$A = 0,28$$

Az állandósult állapotot mutatja a következő ábra:



$$y_\infty = 0,28 \cdot 15,8114 \cdot e_\infty = 4,427 e_\infty$$
$$e_\infty = r - 2y_\infty = r - 8,854 e_\infty$$
$$9,854 e_\infty = 2$$
$$e_\infty = 0,203$$

1.4.9 Tervezzünk olyan soros integráló kompenzátort az alábbi rendszerhez, mely biztosítja a 45°-os fázistartalékot! Határozzuk meg a T_{sz} szabályozási időt és y_∞ értékét, ha r=8!



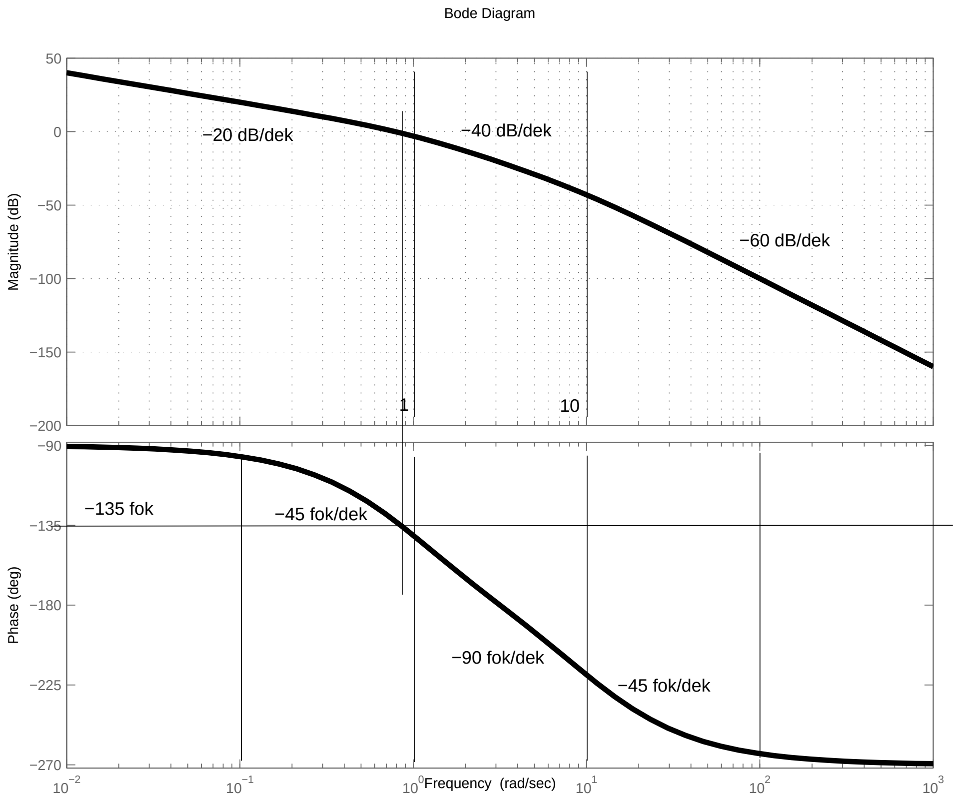
$$\text{A belső kis kör átviteli függvénye: } \bar{G}(s) = \frac{\frac{5}{s}}{1 + 2 \cdot \frac{5}{s}} = \frac{5}{s+10}$$

$$G_H(s) = \frac{A_I}{s} \cdot \frac{5}{s+10} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot 2$$

$A_I = 1$ esetén:

$$G_H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{10}s + 1} \cdot \frac{1}{s+1}$$

0TI 1TP 1TP



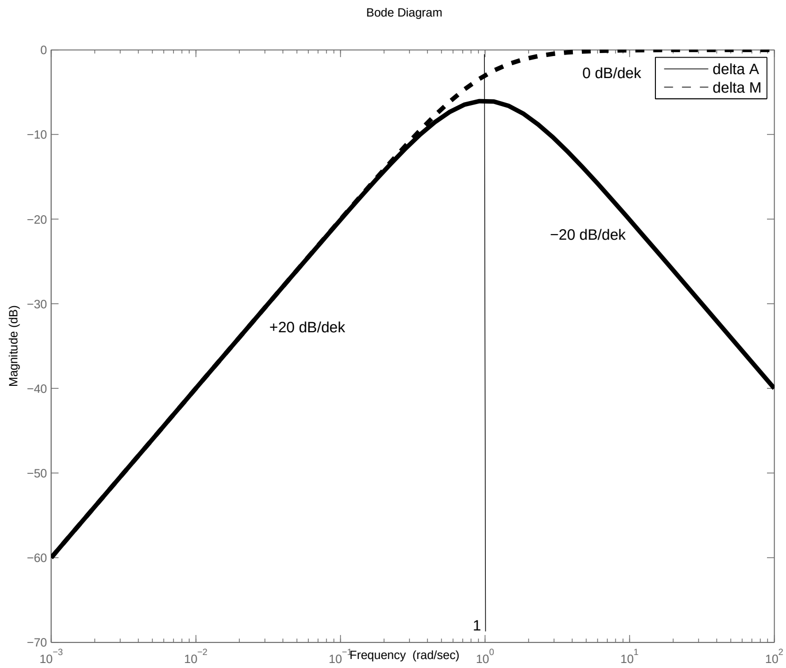
$$X = -1 \text{ (felfelé kell tolni)}$$
$$20 \cdot \lg A = -X$$
$$20 \cdot \lg A = 1$$
$$A = 1,12$$
$$\omega_c = 1,3\frac{1}{s}$$
$$\frac{\pi}{\omega_c} \leq T_{sz} \leq \frac{3\pi}{\omega_c}$$
$$2,42 \leq T_{sz} \leq 7,25$$
$$\text{A rendszer integráló tulajdonságú, így } e_\infty = 0$$
$$e_\infty = 0 = r - 2y_\infty$$
$$y_\infty = 4$$

1.5. Robusztus stabilitás

1.5.1 Adjuk meg az additív és multiplikatív hibafüggvényeket, ábrázoljuk is őket!

$$G(s) = \frac{A}{T^2s^2 + 2Ts + 1}, \qquad G_N(s) = \frac{A}{Ts + 1}, \qquad A = 1, \qquad T = 1$$
$$\text{additív hiba:}$$
$$G(s) = G_N(s) + \Delta_A(s)$$
$$\Delta_A(s) = G(s) - G_N(s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} = \underset{\text{0TD}}{-s} \cdot \underset{\text{1TP}}{\frac{1}{s+1}} \cdot \underset{\text{1TP}}{\frac{1}{s+1}}$$

$$\text{multiplikatív hiba:}$$
$$G(s) = G_N(s) \cdot (1 + \Delta_M(s))$$
$$\Delta_M(s) = \frac{G(s) - G_N(s)}{G_N(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+1}} = \underset{\text{0TD}}{-s} \cdot \underset{\text{1TP}}{\frac{1}{s+1}}$$



Megjegyzés: a $-A_d \cdot s$ tag amplitudó diagramja ugyanúgy $\frac{1}{A_d}$-nél metszi a $0dB$-es tengelyt $+20\frac{dB}{dek}$ meredekséggel, mint az $A_d \cdot s$-é, de fázisforgatása $+270°$ minden frekvencián.

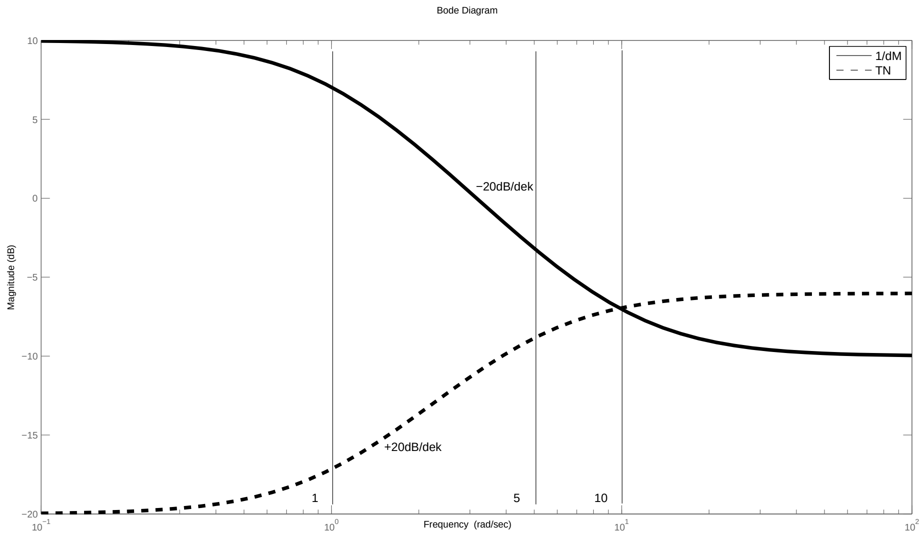
1.5.2 Állapítsuk meg, hogy a $C = \frac{10}{9}$ arányos soros kompenzátor robusztusan stabilizál-e! C mely értékeire lesz a szabályozó robusztusan stabil?

$$G_N = \frac{0,1(s+1)}{\frac{1}{9}s+1} \qquad d_M = \frac{0,3162(s+1)}{0,1s+1}$$

A multiplikatív robusztussági teszt: $\frac{1}{d_M(\omega)} > \left|\frac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$

$$\frac{1}{d_M(s)} = \frac{0,1s+1}{0,3162(s+1)} = \underset{\text{0TP}}{\frac{1}{0,3162}} \cdot \underset{\text{PD}}{(0,1s+1)} \cdot \underset{\text{1TP}}{\frac{1}{s+1}}$$

$$T_N(s) = \frac{G_{HN}(s)}{1+G_{HN}(s)} = \frac{C(s)G_N(s)}{1+C(s)G_N(s)} = \frac{\frac{10}{9}\cdot\frac{0,1(s+1)}{\frac{1}{9}s+1}}{1+\frac{10}{9}\cdot\frac{0,1(s+1)}{\frac{1}{9}s+1}} = \underset{\text{0TP}}{\frac{1}{10}} \cdot \underset{\text{PD}}{(s+1)} \cdot \underset{\text{1TP}}{\frac{1}{\frac{1}{5}s+1}}$$



A $\dfrac{1}{d_M(\omega)} > \left|\dfrac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$ egyenlőtlenség nem teljesül, így a $C = \dfrac{10}{9}$ kompenzátor nem stabilizál robusztusan.

A C értékének meghatározásához az $\dfrac{1}{d_M(s)}$ és a $T_N(s)$ függvények határértékeit kell megvizsgálnunk. A határértéket vagy a 0-ban, vagy ∞-ben vizsgáljuk. Ahhoz, hogy a szabályozó robusztusan stabilizáljon, az $\dfrac{1}{d_M(s)} > |T_N(s)|$ feltételnek teljesülnie kell. A feltétel teljesül, ha az $\dfrac{1}{d_M(s)}$ függvény abszolut minimuma nagyobb, mint a $T_N(s)$ függvény abszolut maximuma. A határértékét aszerint kell 0-ban illetve ∞-ben vizsgálnunk, hogy merre van az $\dfrac{1}{d_M(s)}$ minimuma ill. $T_N(s)$ maximuma. Ugyanez az elv az additív robusztussági teszt esetén is.

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{d_M(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{0,1s+1}{0,3162(s+1)} = \lim_{s\to\infty} \frac{0,1+\dfrac{1}{s}}{0,3162\left(1+\dfrac{1}{s}\right)} = 0,3163$$

$$\lim_{s\to\infty} T_N(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{C\cdot\dfrac{0,1(s+1)}{\frac{1}{9}s+1}}{1+C\cdot\dfrac{0,1(s+1)}{\frac{1}{9}s+1}} = \frac{C}{\frac{10}{9}C+1}$$

$$0,3163 > \frac{C}{\frac{10}{9}+C}$$

$$C < 0,514$$

A fenti esetben teljesül a robusztus stabilitás a konzervatív feltétel szerint multiplikatív hiba esetén.

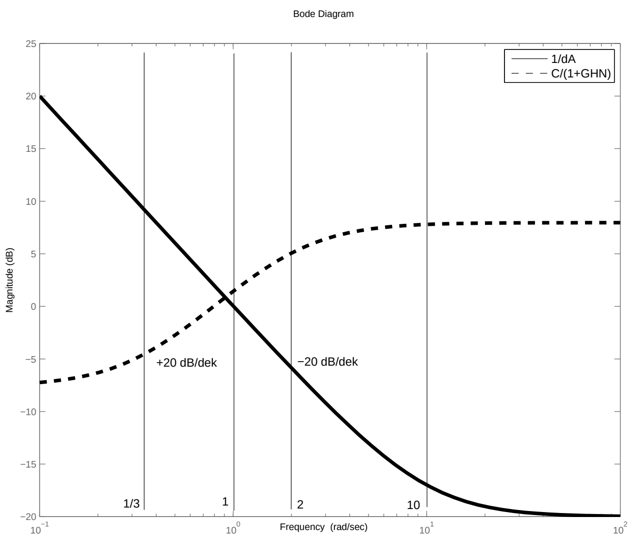
1.5.3 Állapítsuk meg, hogy robusztusan stabilizál-e a $C = 2,5$ soros arányos kompenzátor? Mekkora legyen C értéke, hogy robusztus stabilitási teszt teljesüljön?

$$G_N(s) = \frac{2}{3s+1} \qquad d_A(s) = \frac{s}{0,1s+1}$$

$$\text{Az additív robusztussági teszt: } \frac{1}{d_A(\omega)} > \left|\frac{C(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$$

$$\frac{1}{d_A(s)} = \frac{0,1s+1}{s} = \underset{\text{PD}}{(0,1s+1)} \cdot \underset{\text{0TI}}{\frac{1}{s}}$$

$$\frac{C(s)}{1+G_{HN}(s)} = \frac{C(s)}{1+C(s)G_N(s)} = \frac{2,5}{1+\dfrac{5}{3s+1}} = \underset{\text{0TP}}{\frac{2,5}{6}} \cdot \underset{\text{PD}}{(3s+1)} \cdot \underset{\text{1TP}}{\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}}$$



Az $\dfrac{1}{d_A(\omega)} > \left|\dfrac{C(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$ feltétel nem teljesül, így a $C = 2,5$ soros kompenzátor nem stabilizál robusztusan.

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{d_A(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{0,1s+1}{s} = 0,1$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{C(s)}{1+G_{HN}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{C}{1+C\cdot\dfrac{2}{3s+1}} = C$$

$$0,1 > C$$

A fenti esetben teljesül a robusztus stabilitás a konzervatív feltétel szerint additív hiba esetén.

1.5.4 $M = 0,1$ esetén robusztusan stabil-e az alábbi rendszer? M mely értékeire lesz robusztusan stabil?

$$G_N(s) = \frac{8}{s+4} \qquad C = 2 \qquad d_M(s) = \frac{M \cdot (0,02s+1)}{0,002s+1}$$

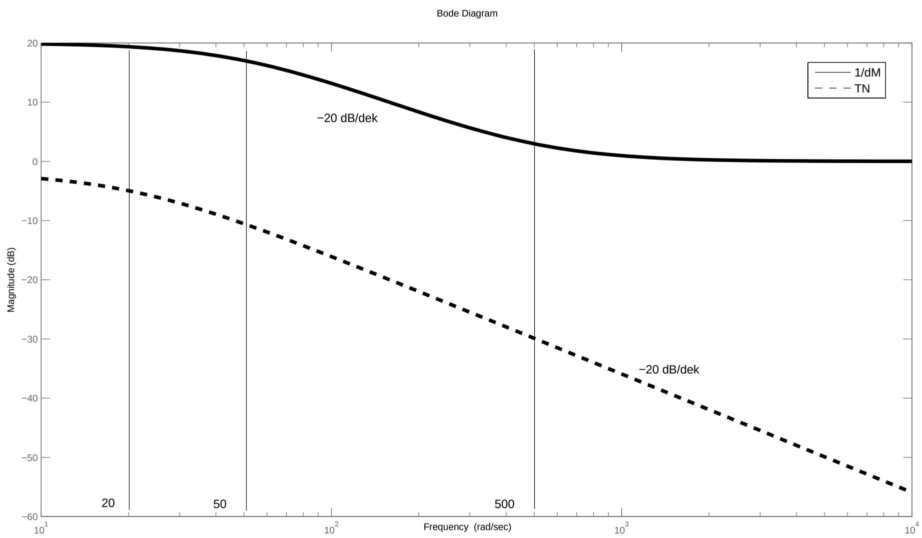
$$\text{A multiplikatív robusztussági teszt: } \frac{1}{d_M(\omega)} > \left| \frac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)} \right|$$

Az $M = 0,1$ értéket felhasználva:

$$\frac{1}{d_M(s)} = \frac{0,002s+1}{0,1(0,02s+1)} = 10 \cdot (0,002s+1) \cdot \frac{1}{0,02s+1}$$

0TP PD 1TP

$$T_N(s) = \frac{C(s)G_N(s}{1+C(s)G_N(s)} = \frac{2 \cdot \dfrac{8}{s+4}}{1 + 2 \cdot \dfrac{8}{s+4}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{20}s+1}$$



Az $\frac{1}{d_M(\omega)} > \left| \frac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)} \right|$ feltétel teljesül, így $M = 0,1$ esetén a $C = 2$ soros kompenzátor robusztusan stabilizál.

$$\lim_{s\to 0} T_N(s) = \lim_{s\to 0} \frac{16}{s+20} = \frac{16}{20}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{d_M(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{0,002s+1}{M \cdot (0,02s+1)} = \frac{0,1}{M}$$

$$\frac{0,1}{M} > \frac{16}{20}$$

$$M < 0,125$$

A fenti esetben teljesül a robusztus stabilitás a konzervatív feltétel szerint multiplikatív hiba esetén.

1.5.5 Mely C értékekre lesz robusztusan stabil a rendszer?

$G_N(s) = \frac{3}{s+10}$ $\quad d_M(s) = \frac{s}{0,1s+1}$ $\quad d_A(s) = \frac{s}{0,1s+1}$

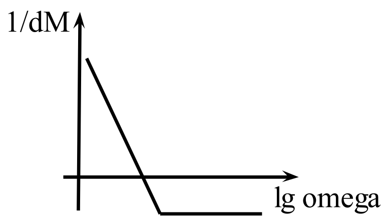
Multiplikatív hibára:

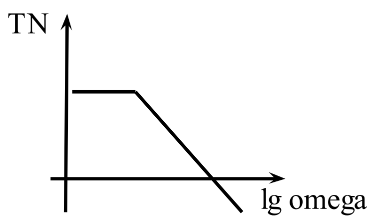
$$\text{A multiplikatív robusztussági teszt: } \frac{1}{d_M(\omega)} > \left|\frac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$$

$$\frac{1}{d_M(s)} = \frac{0,1s+1}{s} = \underbrace{(0,1s+1)}_{\text{PD}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{0TI}}$$

$$T_N(s) = \frac{C(s)G_N(s}{1+C(s)G_N(s)} = \frac{\frac{3C}{s+10}}{1+\frac{3C}{s+10}} = \frac{3C}{s+10+3C} = \underbrace{3C}_{\text{0TP}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+10+3C}}_{\text{1TP}}$$

A feladatban a pontos Bode amplitudó diagramok nem ismertek, azonban az alakjuk meghatározható, és a határértékek kiszámításához ennyi is elég.





$$\lim_{s\to 0} T_N(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3C}{s+10+3C} = \frac{3C}{10+3C}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{d_M(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{0,1s+1}{s} = 0,1$$

$$0,1 > \frac{3C}{10+3C}$$

$$\frac{10}{27} > C$$

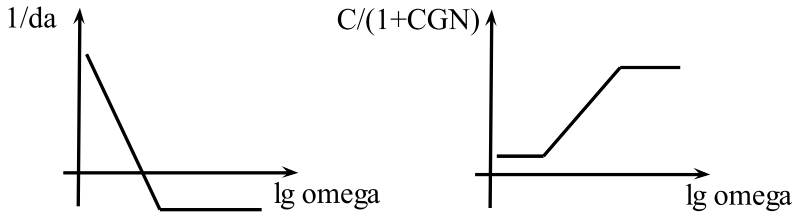
A fenti esetben teljesül a robusztus stabilitás a konzervatív feltétel szerint multiplikatív hibára.

Additív hibára:

$$\text{Az additív robusztussági teszt: } \frac{1}{d_A(\omega)} > \left|\frac{C(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$$

$$\frac{1}{d_A(s)} = \frac{0,1s+1}{s} = \underbrace{(0,1s+1)}_{\text{PD}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{0TI}}$$

$$\frac{C(s)}{1+C(s)G_N(s)} = \frac{C}{1+\frac{3C}{s+10}} = \frac{Cs+10C}{s+10+3C} = \underbrace{\frac{10C}{10+3C}}_{\text{0TP}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{10}s+1\right)}_{\text{PD}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{10+3C}s+1}}_{\text{1TP}}$$



$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{d_A(s)}=\lim_{s\to\infty}\frac{0,1s+1}{s}=0,1$$
$$\lim_{s\to\infty}\frac{C(s)}{1+C(s)G_N(s)}=\lim_{s\to\infty}\frac{Cs+10C}{s+10+3C}=C$$
$$0,1>C$$

A fenti esetben teljesül a robusztus stabilitás a konzervatív feltétel szerint additív hibára.

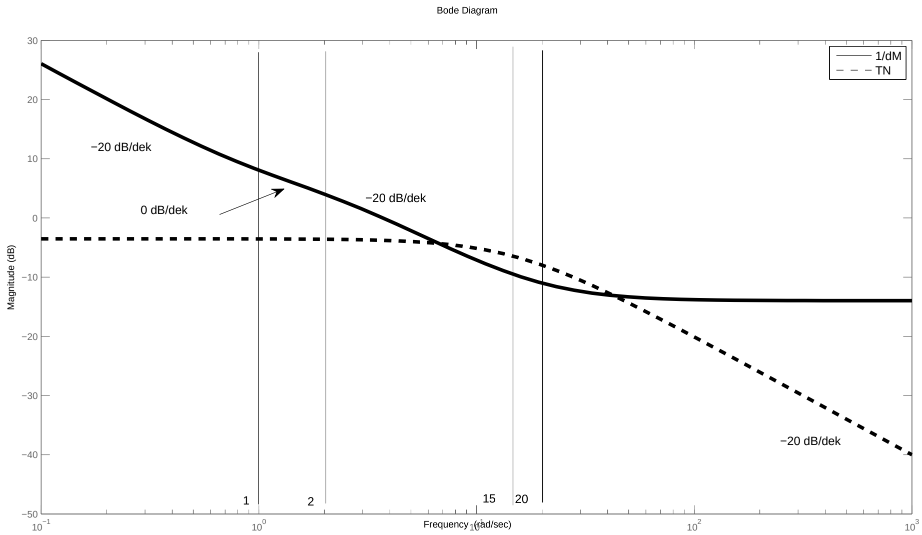
1.5.6 Adott egy névleges rendszer $G_N = \dfrac{1}{0,2s+1}$, valamint ismert a multiplikatív hiba nagysága: $\Delta_M = \dfrac{0,25s^2+0,5s}{0,05s^2+1,05s+1}$ Írjuk fel a $G(s)$ valós rendszer átviteli függvényét! Vizsgáljuk meg, hogy a $C=2$ soros arányos kompenzátor robusztusan stabilizálja-e a zárt kört! Adjuk meg azon kompenzátorok halmazát, melyek robusztusan stabilizálnak!

$$G(s)=G_N(s)(1+\Delta_M(s))=\frac{1}{0,2s+1}\cdot\left(1+\frac{0,25s^2+0,5s}{0,05s^2+1,05s+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{0,2s+1}\cdot\frac{0,05s^2+1,05s+1+0,25s^2+0,5s}{0,05s^2+1,05s+1}=\frac{1}{0,2s+1}\cdot\frac{0,3s^2+1,55s+1}{0,05s^2+1,05s+1}=$$
$$=\frac{0,3s^2+1,55s+1}{0,01s^3+0,21s^2+0,2s+0,05s^2+1,05s+1}=\frac{0,3s^2+1,55s+1}{0,01s^3+0,26s^2+1,25s+1}$$

A multiplikatív robusztussági teszt: $\dfrac{1}{d_M(\omega)}>\left|\dfrac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$

$$\frac{1}{d_M(s)}=\frac{0,05s^2+1,05s+1}{0,25s^2+0,5s}=\underbrace{(s+1)}_{\text{PD}}\cdot\underbrace{(0,05s+1)}_{\text{PD}}\cdot\underbrace{\frac{1}{0,5s}}_{\text{0TI}}\cdot\underbrace{\frac{1}{0,5s+1}}_{\text{1TP}}$$

$$\frac{G_{HN}(s)}{1+G_{HN}(s)}=\frac{C(s)G_N(s)}{1+C(s)G_N(s)}=\frac{2\cdot\dfrac{1}{0,2s+1}}{1+2\cdot\dfrac{1}{0,2s+1}}=\frac{2}{0,2s+3}=\underbrace{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{30}s+1}}_{\text{1TP}}$$



Az $\dfrac{1}{d_M(\omega)} > \left|\dfrac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|$ feltétel nem teljesül, így a $C = 2$ soros kompenzátor nem stabilizál robusztusan.

$$\frac{C(s)G_N(s)}{1+C(s)G_N(s)} = \frac{C}{0,2s+1+C}$$
$$\lim_{s\to 0}\frac{C(s)G_N(s)}{1+C(s)G_N(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{C}{0,2s+1+C} = \frac{C}{1+C}$$
$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{d_M(s)} = \lim_{s\to\infty}\frac{0,05s^2+1,05s+1}{0,25s^2+0,5s} = 0,2$$
$$\frac{C}{1+C} < 0,2$$
$$C < 0,25$$

A fenti esetben teljesül a robusztus stabilitás.

2. fejezet

Bevezetés az állapottér-elméletbe

2.1. Állapottér-reprezentációk tulajdonságai, kapcsolata

A fejezetben szereplő feladatok megoldása előtt célszerű áttanulmányozni [1] 4. és 5. fejezetét, melyben példákat is találunk az állapotváltozók megválasztására.

2.1.1 Állapítsuk meg, hogy egy 2 dimenziós diagonális állapottér-reprezentációval adott rendszer mikor irányítható, és mikor megfigyelhető!

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x + u$$

a) Az irányíthatóság vizsgálata

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} b_d & A_d b_d \end{bmatrix}$$

$$A_d b_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 r_1 \\ \lambda_2 r_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} r_1 & \lambda_1 r_1 \\ r_2 & \lambda_2 r_2 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}\mathcal{C}_2 = 2$, ha $\det\mathcal{C}_2 \neq 0$, azaz a mátrix nem szinguláris

$$\det\mathcal{C}_2 = \begin{vmatrix} r_1 & \lambda_1 r_1 \\ r_2 & r_2 \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) r_1 r_2$$

$$\text{rang}\mathcal{C}_2 = 2 \text{ ha } r_1 \neq 0 \quad \wedge \quad r_2 \neq 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

b) A megfigyelhetőség vizsgálata

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix}$$

$$c^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}\mathcal{O}_2 = 2$, ha $\det\mathcal{O}_2 \neq 0$, azaz ha a mátrix nem szinguláris

$$\det\mathcal{O}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$$

A rendszer akkor és csak akkor megfigyelhető, ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2.1.2 Adott egy rendszer az alábbi állapottér-reprezentációval.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Állapítsuk meg, hogy a rendszer minimál reprezentáció-e?
A rendszer minimál reprezentáció, ha egyszerre irányítható és megfigyelhető.

$$\text{Az irányíthatósági mátrix 3-dimenziós mátrixokra: } \mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 18 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{teljes rangú}$$

$$\text{A megfigyelhetőségi mátrix 3-dimenziós mátrixokra: } \mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{bmatrix}$$

$$c^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{teljes rangú}$$

Az állapottér-reprezentáció irányítható és megfigyelhető, ezért minimál reprezentáció.
b) Írjuk fel a rendszer átviteli függvényét!

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 1 \\ 1 & 2 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+4s-2 & s+4 & -1 \\ s+5 & s^2+4s & -s \\ -s-2 & -2s-1 & s^2-1 \end{bmatrix}}{s^3+4s^2-3s-5}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3+4s^2-3s-5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s^2+4s-2 & s+4 & -1 \\ s+5 & s^2+4s & -s \\ -s-2 & -2s-1 & s^2-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{s^3+4s^2-3s-5}$$

c) Állítsuk elő az irányíthatósági alakot, és ábrázoljuk a blokkdiagramját!

A transzformációs mátrix: $T_c = [\mathcal{C}_3(A,b) \cdot \tau(a)]^{-1}$

A $\mathcal{C}_3$ mátrixot már meghatároztuk az *a)* pontban.

$$\tau(a) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_c = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c = T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_c = T_c b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

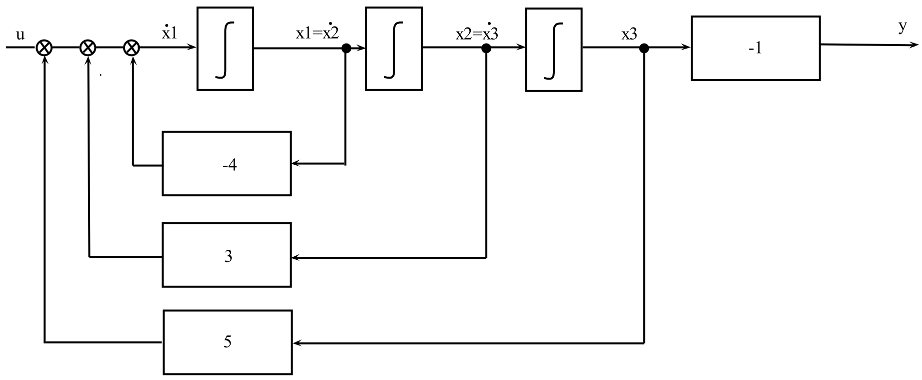
$$c_c^T = c^T T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: a blokksémát könnyebb felrajzolni, ha a mátrixos formából előállítjuk az egyenleteket.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + u \qquad \dot{x}_2 = x_1 \qquad \dot{x}_3 = x_2 \qquad y = -x_3$$



d) Állítsuk elő a diagonális alakot, és ábrázoljuk a blokkdiagramját!

A transzformációs mátrix: $T_d = [\mathcal{C}_3(A,b) \cdot \tau(a) \cdot P_3]^{-1}$

A transzformációs mátrix első két elemét már meghatároztuk az előző pontokban.

$$P_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,29^2 & (-0,87)^2 & (-4,42)^2 \\ 1,29 & -0,87 & -4,42 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,66 & 0,76 & 19,54 \\ 1,29 & -0,87 & -4,42 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_d = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,66 & 0,76 & 19,54 \\ 1,29 & -0,87 & -4,42 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1,29 & 0,87 & 4,42 \\ 0,66 & -0,24 & 18,54 \end{bmatrix}^{-1} =$$

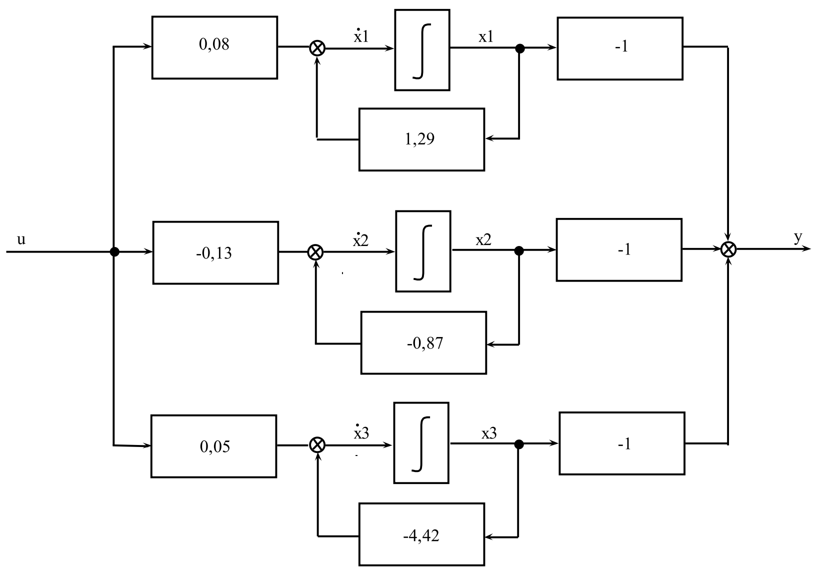
$$= \begin{bmatrix} -0,39 & -0,43 & 0,08 \\ -0,61 & 0,41 & -0,13 \\ 0 & 0,02 & 0,05 \end{bmatrix}$$

$$A_d = T_d A T_d^{-1} = \begin{bmatrix} 1,29 & 0 & 0 \\ 0 & -0,87 & 0 \\ 0 & 0 & -4,42 \end{bmatrix}$$

$$b_d = T_d b = \begin{bmatrix} 0,08 \\ -0,13 \\ 0,05 \end{bmatrix}$$

$$c_d^T = c^T T_d^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: a c_d^T vektor tartalmazhat -1-eket is, mert az a fontos, hogy $r_i = b_i \cdot c_i$ legyen, ahol b_i a b vektor, c_i a c vektor i-edik eleme, r_i pedig a p_i pólushoz tartozó reziduum.



2.1.3 Adott az alábbi állapottér-reprezentáció.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Állítsuk elő az irányíthatósági alakot!

$$\text{A transzformációs mátrix: } T_c = [\mathcal{C}_2(A,b)\cdot\tau(a)]^{-1}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2+3s+2 \qquad \Longrightarrow \qquad a_2 = 1, \qquad a_1 = 3, \qquad a_0 = 2$$

$$\tau(a) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_c = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c = T_cAT_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_c = T_cb = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_c^T = c^TT_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Állítsuk elő a diagonális alakot!

$$T_d = [\mathcal{C}_2(A,b)\cdot\tau(a)\cdot P_2]^{-1}$$

Figyeljük meg, hogy az áttérés mátrixában az első két tag az irányíthatósági alak áttérési mátrixa! Felhasználjuk az *a)* feladatban kiszámolt mátrixot.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_d = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_d = T_dAT_d^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_d = T_db = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4 Adjuk meg az alábbi átviteli függvénnyel adott rendszer irányíthatósági és megfigyelhetőségi állapottér-reprezentációit!

$$G(s) = \frac{4}{s^2-s-6}$$

Az irányíthatósági állapottér-reprezentáció 2 dimenziós esetben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = 1, \qquad a_1 = -1, \qquad a_0 = -6$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_o = A_c^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_o = (c_c^T)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad c_o^T = b_c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Határozzuk meg az alábbi átviteli függvénnyel adott rendszer irányíthatósági állapottér-reprezentációját az $x_1 = \dot{\xi}, x_2 = \xi$ segédváltozók felhasználásával!
A feladat megoldása előtt tanulmányozzuk [1] 127. oldalán kezdődő levezetést!

$$G(s) = \frac{8s + 14}{s^2 + 6s + 5}$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{b(s)} = \frac{U(s)}{a(s)} := \xi(s)$$

$$U(s) = a(s) \cdot \xi(s) = s^2\xi(s) + 6s\xi(s) + 5\xi(s)$$

$$Y(s) = b(s) \cdot \xi(s) = 8s\xi(s) + 14\xi(s)$$

Áttérünk időtartományba:

$$u(t) = \ddot{\xi}(t) + 6\dot{\xi}(t) + 5\xi(t)$$

$$y(t) = 8\dot{\xi}(t) + 14\xi(t)$$

A feladatkiírásban szerepelt, hogy az állapotáltozókat hogyan válasszuk meg.

$$x_1 = \dot{\xi}, \qquad x_2 = \xi$$

$$u(t) = \dot{x}_1 + 6x_1 + 5x_2$$

$$y(t) = 8x_1 + 14x_2$$

$$\dot{x}_1 = -6x_1 - 5x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$y = 8x_1 + 14x_2$$

Mátrixos formába írva:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2.1.6 Transzformáljuk az alábbi állapottér-reprezentációt irányíthatósági alakba!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 3 & 2,5 \end{bmatrix}$$

$$T_c = [\mathcal{C}_2(A, b) \cdot \tau(a)]^{-1}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} A & Ab \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-4 & 0 \\ 1 & s-5 \end{vmatrix} = s^2 - 9s + 20$$

$$a_2 = 1, \qquad a_1 = -9, \qquad a_0 = 20$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_c = T_c b = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_c^T = c^T T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -37,5 \end{bmatrix}$$

2.1.7 Adott az alábbi állapottér-reprezentációval jellemzett rendszer. Transzformáljuk diagonális alakba! Írjuk fel a transzformáció mátrixát és a reprezentáció mátrixát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: ugye észrevettük, hogy a rendszer irányíthatósági alakban adott?

Irányíthatósági alakban adott rendszernél $\mathcal{C}_2(A, b) \cdot \tau(a) = I_2$ és emiatt $T_d = P_2^{-1}$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-1 & -6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - s - 6$$

$$s^2 - s - 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -2$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_d = P_2^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_d = T_d A T_d^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$b_d = T_d b = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c_d^T = c^T T_d^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Természetesen a megszokott lépésekkel is elő lehet álltani a transzformáció mátrixát, de úgy hosszabb.

$$T_d = [\mathcal{C}_2(A, b) \cdot \tau(a) \cdot P_2]^{-1}$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-1 & -6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - s - 6$$

$$a_2 = 1, \qquad a_1 = -1 \qquad a_0 = -6$$

Megjegyzés: a_1 és a_0 értéke az A_c mátrixból közvetlenül is leolvasható.

$$s^2 - s - 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -2$$

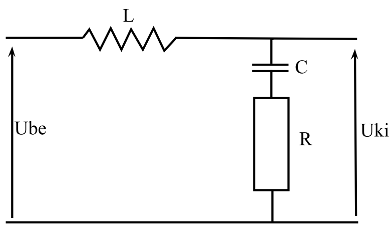
$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau(a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_d = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.1.8 Adott az alábbi villamos elrendezés. Határozzuk meg a rendszer átviteli függvényét! Írjuk fel a rendszer irányítható állapottér-reprezentációját, ha $\dot{x}_2 = x_1$! Rajzoljuk fel az irányíthatósági állapottérhez tartozó blokksémát!



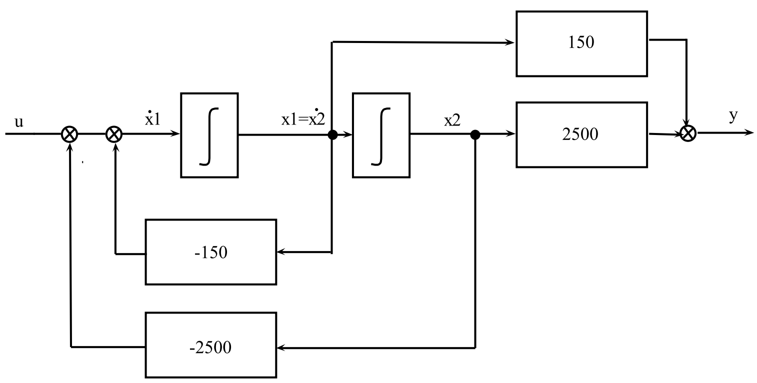
$$R = 300\Omega, \qquad C = 200\mu F, \qquad L = 2H$$

$$G(s) = \frac{R + \frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{RCs + 1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{150s + 2500}{s^2 + 150s + 2500}$$

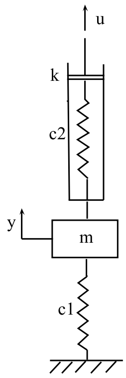
$$\text{Az átviteli függvény } \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \text{ alakú.}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 & -2500 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 150 & 2500 \end{bmatrix}$$



2.1.9 Határozzuk meg az alábbi mechanikai rendszer átviteli függvényét! Írjuk fel a rendszer diagonális állapottér-reprezentációját, ábrázoljuk a hozzá tartozó blokksémát!



$$c_1 = 2\frac{N}{m}, \qquad c_2 = 8\frac{N}{m}, \qquad k = 11\frac{Ns}{m}, \qquad m = 1kg$$

$$m\ddot{y} = -c_1 y + c_2(u - y) + k(\dot{u} - \dot{y})$$

$$ms^2 Y = -c_1 Y + c_2(U - Y) + ks(U - Y)$$

$$G(s) = \frac{ks + c_2}{ms^2 + ks + c_1 + c_2} = \frac{\frac{k}{m}s + \frac{c_2}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}s + \frac{c_1 + c_2}{m}} = \frac{11s + 8}{s^2 + 11s + 10}$$

$$s^2 + 11s + 10 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -10$$

Az átviteli függvény felírható a reziduumok segítségével, lásd [1] 129. oldal:

$$G(s) = \frac{r_1}{s - \lambda_1} + \frac{r_2}{s - \lambda_2}, \text{ ahol}$$

$$r_i = \lim_{s \to \lambda_i} (s - \lambda_i) \frac{b(s)}{\prod\limits_i (s - \lambda_i)}$$

$$r_1 = \lim_{s \to -1} (s + 1) \frac{11s + 8}{(s + 1)(s + 10)} = -\frac{1}{3}$$

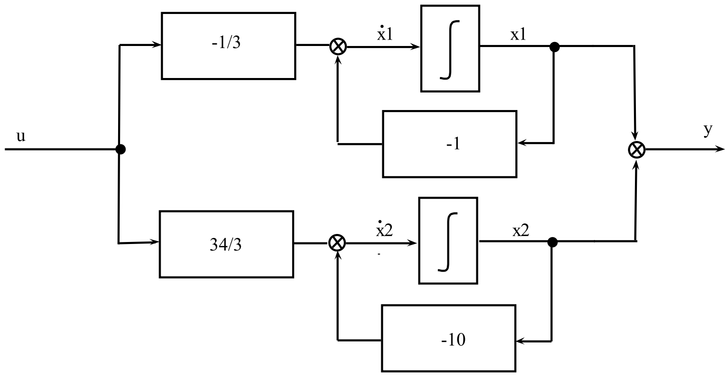
$$r_2 = \lim_{s \to -10} (s + 10) \frac{11s + 8}{(s + 1)(s + 10)} = \frac{34}{3}$$

$$G(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{s + 1} + \frac{\frac{34}{3}}{s + 10} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

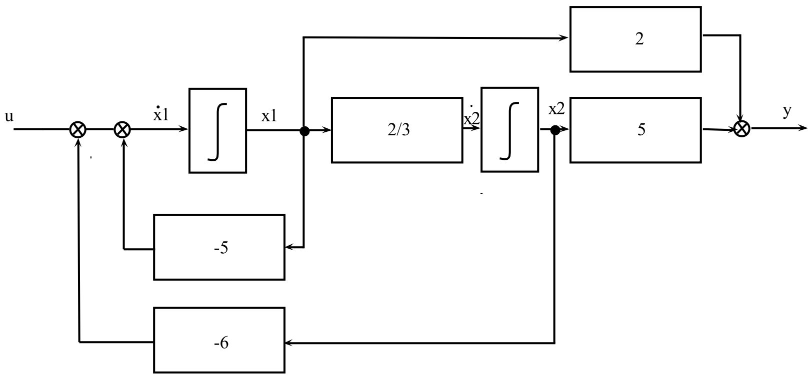
$$Y(S) = -\frac{\frac{1}{3}}{s + 1} U(s) + \frac{\frac{34}{3}}{s + 10} U(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{34}{3} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



2.1.10 Írjuk fel a blokksémával reprezentált állapottér mátrixait! Írjuk fel a T hasonlósági transzformáció mátrixát, mely előállítja a diagonális állapottér-reprezentációt, majd végezzük el a transzformációt!



$$\dot{x}_1 = -5x_1 - 6x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2}{3}x_1$$

$$y = 2x_1 + 5x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T_d = [\mathcal{C}_2(A,b) \cdot \tau(a) \cdot P_2]^{-1}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + 5s + 4$$

$$\tau(a) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_d = \left(\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_d = T_d A T_d^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_d = T_d b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$c_d^T = c^T T_d^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

2.1.11 Adott egy rendszer differenciálegyenlet-rendszere, valamint a megfigyelési egyenlet. Határozzuk meg az átviteli függvényt! Írjuk fel a rendszer állapottér-reprezentációját, vizsgáljuk meg, hogy irányítható-e?

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= \quad x_1 \qquad\;\; + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + u \\ y &= \quad 2x_1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} = \frac{1}{s^3 + s^2 - 6s - 6} \cdot \operatorname{adj}\left(\begin{bmatrix} s+2 & -3 & 1 \\ -1 & s & -1 \\ -2 & -3 & s-1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{s^3 + s^2 - 6s - 6} \cdot \begin{bmatrix} s(s-1) - 3 & (s-1) + 2 & 2s + 3 \\ (3s-3) - 3 & (s+2)(s-1) + 2 & 3s + 6 + 6 \\ 3 - s & (s+2) - 1 & (s+2)s - 3 \end{bmatrix}^T$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \operatorname{adj}(sI - A) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(sI-A)} = \frac{-2s + 6}{s^3 + s^2 - 6s - 6}$$

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix}$$

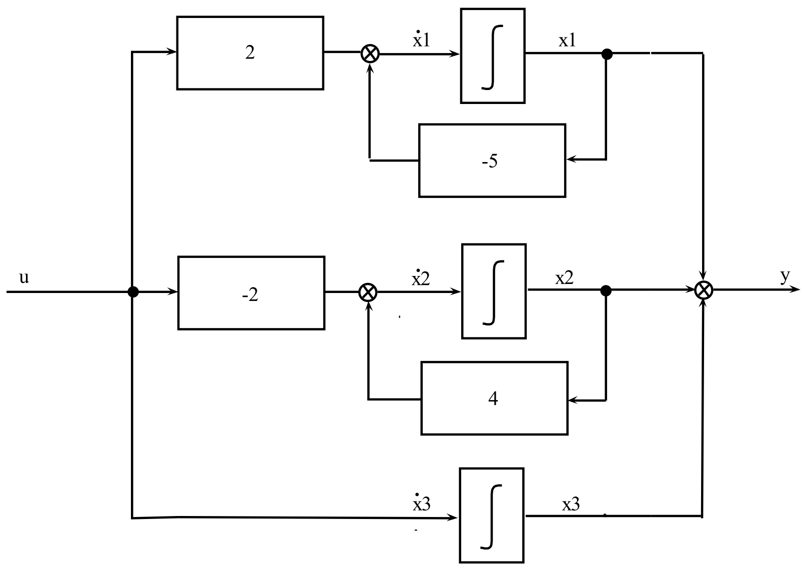
$$Ab = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 b = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{C}_3 = 4 \cdot (-1) = -4 \quad \neq 0 \Longrightarrow \text{ irányítható}$$

2.1.12 Adott az alábbi blokkséma. Írjuk fel a rendszer diagonális állapottét-reprezentációs alakját! Minimális-e az állapottér reprezentáció? Stabil-e az állapottér-reprezentáció? Határozzuk meg a G(s) átviteli függvényt!



$$A_d = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_d = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2b = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -32 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 50 \\ -2 & -8 & -32 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{C}_3 = 320 + 400 = 720 \quad \neq 0 \text{ Irányítható}$$

$$\text{rang } \mathcal{C}_3 = 3$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{bmatrix}$$

$$c^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T A^2 = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 25 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } \mathcal{O}_3 = 3 \text{ Megfigyelhető}$$

$$\text{Minimális, mert rang } \mathcal{C}_3 = \text{rang } \mathcal{O}_3$$

$$\text{Ezzel ekvivalens, hogy: } \det \mathcal{O}_3 = -180 \neq 0$$

$$p_1 = -5, \qquad p_2 = 4, \qquad p_3 = 0$$

$$\text{Instabil, mert Re } p_2 > 0$$

$$G(s) = \sum_i \frac{r_i}{s - \lambda_i} = \frac{2}{s+5} - \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s} = \frac{s^2 - 17s - 20}{s^3 + s^2 - 20s}$$

2.2. Pólusallokáció

[1] 161-163. oldalán is találunk két pólusallokáció példát.

2.2.1 Adott az alábbi állapottér-reprezentáció. Állapítsuk meg, hogy minimális-e! Tervezzük meg az állapot-visszacsatolás mátrixát, mely a rendszer pólusait a $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ pontokba helyezi!

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel diagonális állapottér-alakról van szó, és a c^T vektor 0-kat tartalmaz, ezért nem minimális.

Bizonyítás a „hagyományos" módon:

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A^2b = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4,5 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0,5 & 1,5 & 4,5 \\ 2 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{C}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0,5 & 1,5 & 4,5 \\ 2 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \text{ Irányítható.}$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{bmatrix}$$

$$c^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{O}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ Nem megfigyelhető.}$$

A rendszer nem megfigyelhető, így nem minimális. Viszont irányítható, így állapot-visszacsatolás tervezhető rá.

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s-3 & 0 \\ 0 & 0 & s-5 \end{vmatrix} = s^3 - 6s^2 - s + 30 \quad = a(s)$$

$$a_3 = 1 \qquad a_2 = -6 \qquad a_1 = -1 \qquad a_0 = 30$$

$$\alpha(s) = (s+2)(s+3)(s+5) = s^3 + 10s^2 + 31s + 30$$

A visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja

$$\alpha_3 = 1 \qquad \alpha_2 = 10 \qquad \alpha_1 = 31 \qquad \alpha_0 = 30$$

Az irányíthatósági alak transzormációs mátrixa

$$T_c = (\mathcal{C}_3(A,b) \cdot \tau(a))^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0,5 & 1,5 & 4,5 \\ 2 & 10 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,11 & -1,80 & 0,89 \\ -0,06 & -0,60 & 0,18 \\ 0,03 & -0,20 & 0,04 \end{bmatrix}$$

Az állapot-visszacsatolás irányíthatósági állapottérben

$$k_c^T = \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 & \alpha_0 - a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 32 & 0 \end{bmatrix}$$

Az állapot-visszacsatolás az eredeti állapottérben

$$k^T = k_c^T \cdot T_c = \begin{bmatrix} 16 & 32 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,11 & -1,80 & 0,89 \\ -0,06 & -0,60 & 0,18 \\ 0,03 & -0,20 & 0,04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,16 & -48 & 20 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Tervezzünk állapot-visszacsatolást az alábbi rendszerre $\begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}$ előírt pólusokkal!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Az irányíthatóság ellenőrzése

$$\mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{C}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{irányítható}$$

2. Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-1 & -4 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 - 9$$

$$a_2 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_0 = -9$$

3. A visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja

$$\alpha(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$$

$$\alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 = 5 \qquad \alpha_0 = 6$$

4. Az irányíthatósági alak transzformációs mátrixa

$$T_c = (\mathcal{C}_2(A,b) \cdot \tau(a))^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = -\frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Az állapot-visszacsatolás irányíthatósági állapottérben

$$k_c^T = \begin{bmatrix}\alpha_1 - a_1 & \alpha_0 - a_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 15\end{bmatrix}$$

6. Az állapot-visszacsatolás az eredeti állapottérben

$$k^T = k_c^T \cdot T_c = \begin{bmatrix}5 & 15\end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix}0 & -9\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

2.2.3 Adott az alábbi állapottér-reprezentáció. Tervezzünk olyan k^T állapot-visszacsatolást, mely a $\bar{p} = [-1 \quad -2 \quad -3]$ helyekre allokálja a rendszer pólusait! Határozzuk meg azt a T transzformációt, mely az (A, b, c^T)-ból előállítja az (A_c, b_c, c_c^T) irányíthatósági állapottér-reprezentációt!

$$A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

1. Az irányíthatóság ellenőrzése

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{C}_3 = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \text{A rendszer irányítható}$$

2. Az eredeti rendszer karakterszitikus polinomja

$$det(sI - A) = s[(s+3)(s-1) - 2] + (2)(-s+1) - 1 = s^3 + 2s^2 - 7s + 1$$

$$a_3 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_1 = -7, \qquad a_0 = 1$$

3. A visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja

$$\alpha(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$\alpha_3 = 1, \qquad \alpha_2 = 6, \qquad \alpha_1 = 11, \qquad \alpha_0 = 6$$

4. Az irányíthatósági alak transzformációs mátrixa

$$T_c = (\mathcal{C}_3(A, b) \cdot \tau(a))^{-1} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & -7\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5. Az állapot-visszacsatolás irányíthatósági állapottérben

$$k_c^T = \begin{bmatrix}\alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 & \alpha_0 - a_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 18 & 5\end{bmatrix}$$

6. Az állapot-visszacsatolás az eredeti állapottérben

$$k^T = k_c^T \cdot T_c = \begin{bmatrix}4 & 18 & 5\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 10 & 35\end{bmatrix}$$

2.2.4 Adott az alábbi állapottér-reprezentáció. Tervezzünk olyan k^T állapot-visszacsatolást, mely a $\bar{p} = [-1 \quad -3 \quad -4]$ helyekre allokálja a pólusokat! Rajzoljuk fel a zárt rendszer irányíthatósági állapottér-reprezentációját! Vezessük le a zárt rendszer karakterisztikus polinomját a zárt rendszer állapotmátrixának segítségével!
Megjegyzés: a rendszer irányíthatósági alakban adott.

$$A = \begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1. Az irányíthatóság ellenőrzése

Az irányíthatósági állapottér-alak önmagában garantálja, hogy a rendszer irányítható, így az irányíthatóságot nem kell ellenőrizni.

2. Az eredeti rendszer karakterszitikus polinomja

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-2 & -5 & 1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = s^3 - 2s^2 - 5s + 1$$

$$a_3 = 1, \qquad a_2 = -2, \qquad a_1 = -5, \qquad a_0 = 1$$

3. A visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja

$$\alpha(s) = (s+1)(s+3)(s+4) = s^3 + 8s^2 + 19s + 12$$

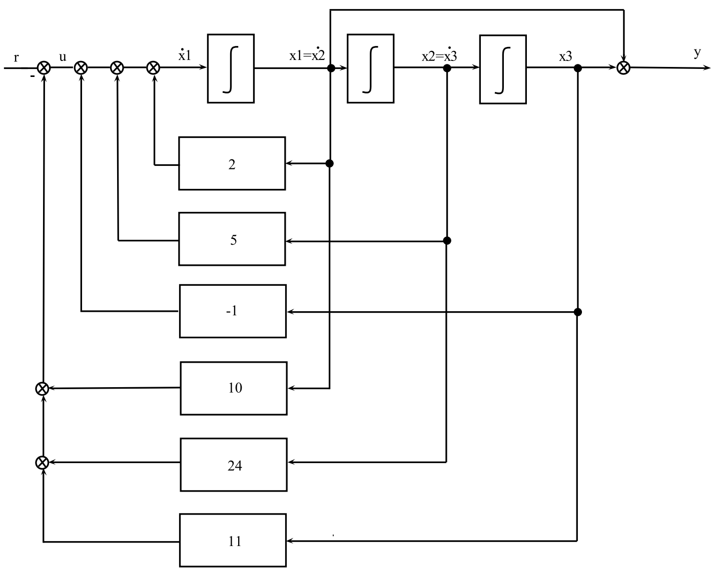
$$\alpha_3 = 1, \qquad \alpha_2 = 8, \qquad \alpha_1 = 19, \qquad \alpha_0 = 12$$

4. Az irányíthatósági alak transzformációs mátrixa

$$T_c = I$$

5. Az állapot-visszacsatolás irányíthatósági állapottérben

$$k_c^T = \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 & \alpha_0 - a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 24 & 11 \end{bmatrix}$$



A zárt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A + bk^T) = \begin{vmatrix} s+8 & 19 & 12 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + 8s^2 + 19s + 12$$

2.2.5 Vezessük le segédváltozóval az inverz inga irányíthatósági állapottér-reprezentációját ($x_1 = \dot{x}_2$), ha ismerjük az átviteli függvényét: $G(s) = \dfrac{-2}{s^2 - 4}$. Tervezzünk olyan k^T állapot-visszacsatolást, mely a $\bar{p} = [-1 \quad -2]$ helyekre allokálja a rendszer pólusait. Rajzoljuk fel a zárt visszacsatolt rendszer blokksémáját! Határozzuk meg a zárt visszacsatolt rendszer átviteli függvényét!

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$
$$\xi(s) = \frac{U(s)}{a(s)} = \frac{Y(s)}{b(s)}$$
$$Y(s) = b(s) \cdot \xi(s) = -2\xi(s)$$
$$U(s) = a(s) \cdot \xi(s) = (s^2 - 4)\xi(s)$$
$$y(t) = -2\xi(t)$$
$$u(t) = \ddot{\xi}(t) - 4\xi(t)$$
$$x_1 = \dot{\xi}(t), \qquad x_2 = \xi(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \quad 4x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= \quad -2x_2 \end{aligned}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Az irányíthatóság ellenőrzése

Az irányíthatósági állapottér-alak önmagában garantálja, hogy a rendszer irányítható, így az irányíthatóságot nem kell ellenőrizni.

2. Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja

$$\det(sI - A) = a(s) = s^2 - 4$$
$$a_2 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_0 = -4$$

3. A visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja

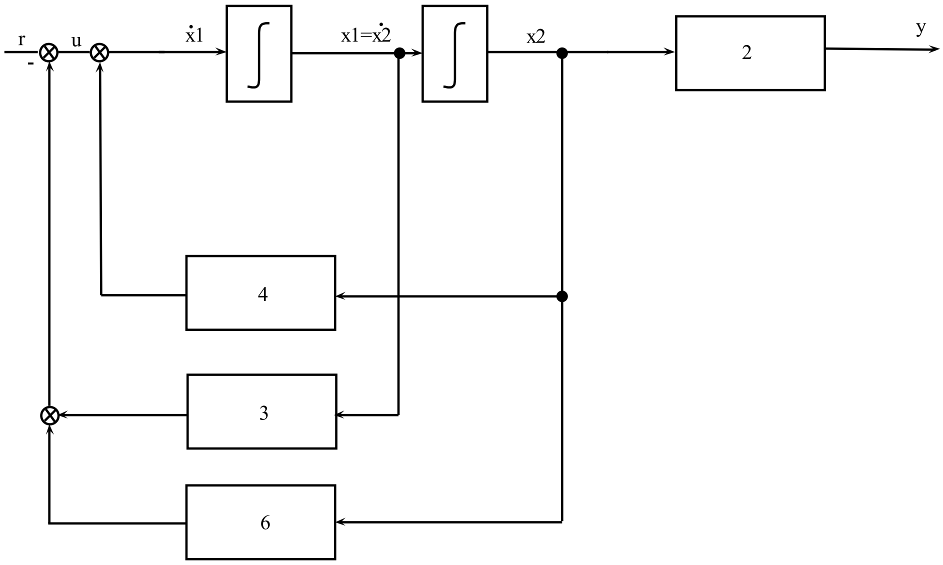
$$\alpha(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$
$$\alpha_2 = 1, \qquad \alpha_1 = 3, \qquad \alpha_0 = 2$$

4. Az irányíthatósági alak transzformációs mátrixa

$$T_c = I$$

5. Az állapot-visszacsatolás irányíthatósági álapottérben

$$k_c^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 & \alpha_0 - a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\bar{G}(s) = \frac{-2}{(s+1)(s+2)}$$


r
-
u
ẋ1
x1=ẋ2
x2
2
y
4
3
6

Irodalomjegyzék

[1] Gáspár Péter Bokor József. *Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal.* Typotex Elektronikus Kiadó Kft, 2008.

[2] Zobory István Horváth Károly, Simonyi Alfréd. *Mérnöki fizika.* Műegyetemi Kiadó, 2005.

[3] Bauer Péter Luspay Tamás. *Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai.* 2010.