Lineáris Kvadratikus Szabályzó tervezése (LQR: Linear Quadratic Regulator)

Legyen adott az alábbi SISO rendszer folytonos, lineáris, időinvariáns állapottér-reprezentált formában:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \qquad x(0) = x_0 \\ y &= c^T x, \end{aligned}$$

A feladat az $u(t)$ szabályozó jel megválasztása úgy, hogy $t \in [0,T]$ esetén minimalizálja az alábbi **kvadratikus funkcionált**:

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[x^T Q x + r u^2\right] dt, \qquad Q \geq 0, r > 0,$$

Az optimalizálás dinamikus feltételét az állapotdinamikai egyenletek jelentik.

- A funkcionálban szereplő $x^T Qx$ tag a rendszer teljes energiáját bünteti egy $Q \geq 0$ súlymátrix segítségével
- *Megjegyzés* $Q \geq 0$ jelentése, hogy Q **pozitív szemidefinit** mátrix, azaz az $x^T Qx$ kvadratikus alak ≥ 0 minden $x \neq 0$ vektor esetén (ekkor Q minden sajátértéke ≥ 0)

- A funkcionálban szereplő ru^2 a rendszerbe betáplált szabályozó energiát súlyozza, $r > 0$ skalár segítségével.

- Rendezzük a dinamikus feltételt $\Phi(x, \dot{x}, u, t) = Ax + bu - \dot{x} = 0$ alakba, azaz redukáljuk nullára. Majd a Lagrange szorzóval (multiplikátorral) megszorozva adjuk hozzá a funkcionálban található összeghez.

- A Lagrange multiplikátor másnéven a rendszer társváltozója, jelölése: $\lambda(t)$

Ekkor a minimalizálandó funkcionál a következő módon írható:

$$
\begin{aligned}
L =& J(x,\dot{x},u,\lambda) = \\
=& \frac{1}{2}\int_0^T \left[F(x,u,t) + \Phi^T(x,\dot{x},u,t)\cdot\lambda(t)\right] dt \to \min_{u(t)}
\end{aligned}
$$

ahol

$$
F(x,u,t) = \left[x^T(t) Q x(t) + r u^2(t)\right].
$$

Az $u^o(t)$ optimális beavatkozó jelnek ki kell elégítenie a:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} &= 0
\end{aligned}
$$

Euler-Lagrange féle differenciálegyenlet rendszert

A deriválásokat előírva:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\Phi^T(x,\dot{x},u,t)\lambda(t)\right)}{\partial\dot{x}(t)} -$$

$$-\frac{\partial F(x,u,t)}{\partial x(t)} - \frac{\partial\Phi^T(x,\dot{x},u,t)}{\partial x(t)}\lambda(t) = 0,$$

$$-\frac{\partial F(x,u,t)}{\partial u(t)} - \frac{\partial\Phi^T(x,\dot{x},u,t)}{\partial u(t)}\lambda(t) = 0.$$

A deriválásokat elvégezve:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\Phi^T(x,\dot{x},u,t)\lambda(t)\right)}{\partial\dot{x}(t)} =$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(x^TA^T+ub^T-\dot{x}^T\right)}{\partial\dot{x}}\lambda\right) = -\dot{\lambda}(t)$$

$$\frac{\partial F(x,u,t)}{\partial x(t)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\cdot x^TQx\right) = \left(\frac{1}{2}\cdot 2Qx\right) = Qx$$

$$\frac{\partial \Phi^T(x, \dot{x}, u, t)}{\partial x(t)} \lambda(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^T A^T + u b^T - \dot{x}^T \right) \lambda = A^T \lambda$$

Az optimális megoldás első feltétele:

$$-\dot{\lambda}^o - Q x^o - A^T \lambda^o = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}^o = -Q x^o - A^T \lambda^o$$

A deriválásokat elvégezve:

$$\frac{\partial F(x,u,t)}{\partial u(t)} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\cdot ru^2\right) = \left(\frac{1}{2}\cdot 2ru\right) = ru$$

$$\frac{\partial \Phi^T(x,\dot{x},u,t)}{\partial u(t)}\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial u}\left(x^T A^T + ub^T - \dot{x}^T\right)\lambda = b^T\lambda$$

Az optimális megoldás második feltétele:

$$-ru^o - b^T\lambda^o = 0 \;\Rightarrow\; u^o = -r^{-1}b^T\lambda^o$$

$$\dot{x}^o = Ax^o + b(-r^{-1}b^T\lambda^o)$$

Az eredményeket mátrixos formában írva kapjuk a **Hamilton mátrixot**:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^o \\ \dot{\lambda}^o \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -br^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\text{Hamilton mátrix}} \begin{bmatrix} x^o \\ \lambda^o \end{bmatrix}, \qquad x(0), \lambda(T)$$

Bizonyítható, hogy felírható:

$$\lambda(t) = P(t)x(t),$$

ahol $P(t) > 0$ minden $t \in [0, T]$, és kielégíti a Ricatti differenciál egyenletet, mely a következő formában írható:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \dot{P}x + P\dot{x} = \dot{P}x + P(Ax - br^{-1}b^T Px) = -Qx - A^T Px \\
(\dot{P}(t) &+ P(t)A + A^T P(t) - P(t)br^{-1}b^T P(t) + Q)x = 0 \\
\dot{P}(t) &+ P(t)A + A^T P(t) - P(t)br^{-1}b^T P(t) + Q = 0.
\end{aligned}$$

A differenciál Ricatti egyenletnek létezik stacionári-us megoldása:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{P}(t) = 0$$

tehát:

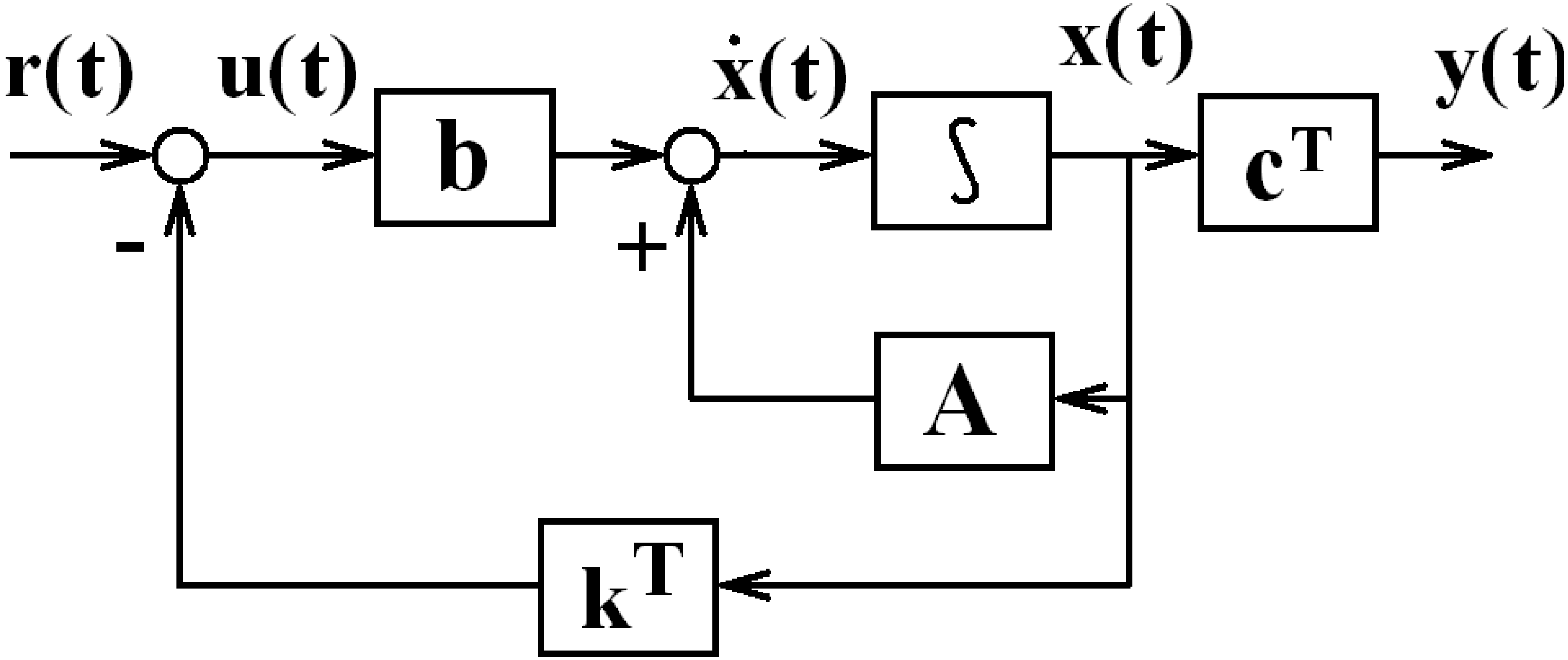
$$PA + A^T P - Pbr^{-1}b^T P + Q = 0$$

A fenti egyenletet **C**ontrol **A**lgebrai **R**icatti **E**gyenletnek (**CARE**) hívjuk.

- Ha (A,b) irányítható, akkor a Control Algebrai Ricatti Egyenlet megoldható, tehát létezik P.
- Így generálható az optimális bemenet

$$\begin{aligned} \dot{x}^o &= Ax^o + b(-r^{-1}b^T P x^o) \\ y^o &= c^T x^o \end{aligned}$$

ahol $P > 0$ és $P = P^T$.



LQR szabályozási kör