

Lineáris Kvadrátikus Szabályzó tervezése (LQR: Linear Quadratic Regulator)

Legyen adott az alábbi SISO rendszer folytonos, lineáris, időinvariáns állapotter-reprezentált formában:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= c^T x,\end{aligned}$$

A feladat az $u(t)$ szabályozó jel megválasztása úgy, hogy $t \in [0, T]$ esetén minimalizálja az alábbi **kvadrátikus funkcionált**:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x^T Qx + ru^2] dt, \quad Q \geq 0, r > 0,$$

Az optimalizálás dinamikus feltételét az állapotdinamikai egyenletek jelentik.

- A funkcionálban szereplő $x^T Qx$ tag a rendszer teljes energiáját bünteti egy $Q \geq 0$ súlymátrix segítségével
- *Megjegyzés* $Q \geq 0$ jelentése, hogy Q **pozitív szemi-definit** mátrix, azaz az $x^T Qx$ kvadrátikus alak ≥ 0 minden $x \neq 0$ vektor esetén (ekkor Q minden sajátértéke ≥ 0)

- A funkcionálban szereplő ru^2 a rendszerbe betáplált szabályozó energiát súlyozza, $r > 0$ skalár segítségével.
- Rendezzük a dinamikus feltételt $\Phi(x, \dot{x}, u, t) = Ax + bu - \dot{x} = 0$ alakba, azaz redukáljuk nullára. Majd a Lagrange szorzóval (multiplikátorral) megszorozva adjuk hozzá a funkcionálban található összeghez.
- A Lagrange multiplikátor másnéven a rendszer társ-változója, jelölése: $\lambda(t)$

Ekkor a minimalizálandó funkcionál a következő módon írható:

$$\begin{aligned} L = J(x, \dot{x}, u, \lambda) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T [F(x, u, t) + \Phi^T(x, \dot{x}, u, t) \cdot \lambda(t)] dt \rightarrow \min_{u(t)} \end{aligned}$$

ahol

$$F(x, u, t) = [x^T(t) Q x(t) + r u^2(t)].$$

Az $u^o(t)$ optimális beavatkozó jelnek ki kell elégítenie a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

Euler-Lagrange féle differenciálegyenlet rendszert

A deriválásokat előírva:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (\Phi^T(x, \dot{x}, u, t) \lambda(t))}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{\partial F(x, u, t)}{\partial x(t)} - \frac{\partial \Phi^T(x, \dot{x}, u, t)}{\partial x(t)} \lambda(t) = 0,$$

$$- \frac{\partial F(x, u, t)}{\partial u(t)} - \frac{\partial \Phi^T(x, \dot{x}, u, t)}{\partial u(t)} \lambda(t) = 0.$$

A deriválásokat elvégezve:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial (\Phi^T(x, \dot{x}, u, t) \lambda(t))}{\partial \dot{x}(t)} = \\ & = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (x^T A^T + u b^T - \dot{x}^T)}{\partial \dot{x}} \lambda \right) = -\dot{\lambda}(t) \\ & \frac{\partial F(x, u, t)}{\partial x(t)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \cdot x^T Q x \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 Q x \right) = Q x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi^T(x, \dot{x}, u, t)}{\partial x(t)} \lambda(t) = \frac{\partial}{\partial x} (x^T A^T + u b^T - \dot{x}^T) \lambda = A^T \lambda$$

Az optimális megoldás első feltétele:

$$-\dot{\lambda}^o - Qx^o - A^T \lambda^o = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}^o = -Qx^o - A^T \lambda^o$$

A deriválásokat elvégezve:

$$\frac{\partial F(x, u, t)}{\partial u(t)} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \cdot ru^2 \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2ru \right) = ru$$

$$\frac{\partial \Phi^T(x, \dot{x}, u, t)}{\partial u(t)} \lambda(t) = \frac{\partial}{\partial u} (x^T A^T + ub^T - \dot{x}^T) \lambda = b^T \lambda$$

Az optimális megoldás második feltétele:

$$-ru^o - b^T \lambda^o = 0 \Rightarrow u^o = -r^{-1} b^T \lambda^o$$

$$\dot{x}^o = Ax^o + b(-r^{-1} b^T \lambda^o)$$

Az eredményeket mátrixos formában írva kapjuk a **Hamilton mátrixot**:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^o \\ \dot{\lambda}^o \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -br^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\text{Hamilton mátrix}} \begin{bmatrix} x^o \\ \lambda^o \end{bmatrix}, \quad x(0), \lambda(T)$$

Bizonyítható, hogy felírható:

$$\lambda(t) = P(t)x(t),$$

ahol $P(t) > 0$ minden $t \in [0, T]$, és kielégíti a Ricatti differenciál egyenletet, mely a következő formában írható:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \dot{P}x + P\dot{x} = \dot{P}x + P(Ax - br^{-1}b^T Px) = -Qx - A^T Px \\ (\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - P(t)br^{-1}b^T P(t) + Q)x &= 0 \\ \dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - P(t)br^{-1}b^T P(t) + Q &= 0.\end{aligned}$$

A differenciál Ricatti egyenletnek létezik stacionárius megoldása:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{P}(t) = 0$$

tehát:

$$PA + A^T P - Pbr^{-1}b^T P + Q = 0$$

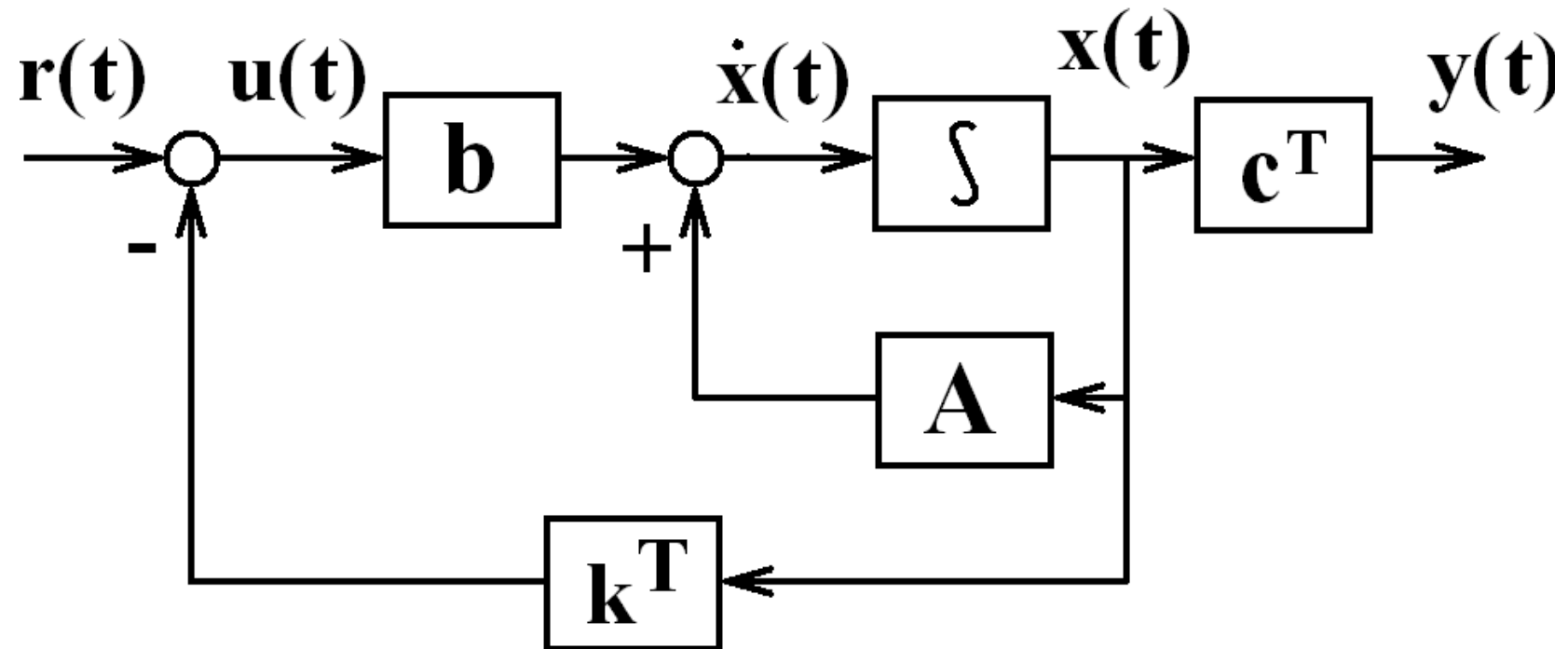
A fenti egyenletet **Control Algebrai Ricatti Egyenletnek (CARE)** hívjuk.

- Ha (A, b) irányítható, akkor a Control Algebrai Riccati Egyenlet megoldható, tehát létezik P .
- Így generálható az optimális bemenet

$$\dot{x}^o = Ax^o + b(-r^{-1}b^T Px^o)$$

$$y^o = c^T x^o$$

ahol $P > 0$ és $P = P^T$.



LQR szabályozási kör