Állapotmegfigyelő

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a rendszer állapotát mérni tudjuk. Az állapot ismerete szükséges az állapot-visszacsatolt szabályzó tervezéséhez. Ha nem ismerjük az $x(t)$ állapotvektort, akkor egy olyan $\hat{x}(t)$ (azonos dimenziójú) mennyiséget képzünk, mely asszimptotikusan közelíti az eredeti állapotot, tehát $\hat{x}(t) \to x(t)$ miközben $t \to \infty$.

Ha ismert (A, b, c^T), akkor

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + bu(t), \\ \hat{y}(t) &= c^T\hat{x}(t), \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0,\end{aligned}$$

ahol az állapot-becslés hibája $e(t)$=$x(t)$-$\hat{x}(t), t \in [0, \infty)$. Az állapotbecslés hibájának időbeli változását annak differenciálegyenlete adja meg:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\
&= Ax(t) + bu(t) - A\hat{x}(t) - bu(t) \\
&= A(x(t) - \hat{x}(t)) = Ae(t),
\end{aligned}$$

ahol $e(0) = \hat{e}_0$ kezdeti értékkel egy homogén lineáris differenciálegyenlet adódik.

Laplace-tartományban:

$$s \cdot E(s) - e_0 = AE(s)$$

$$(sI - A)E(s) = e_0$$

$$E(s) = (sI - A)^{-1} e_0 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1} e_0\right\} = e^{At} e_0$$

Ha e_0 nem zérus, akkor az állapothiba lecseng, feltéve hogy az A mátrix stabil azaz,

$$Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$$
$$i = 1..n$$

ahol $n = dim(x)$ és így $e(t) \rightarrow 0$ miközben $t \rightarrow \infty$.

Ha A instabil, illetve ha a tervező befolyásolni akarja az állapothiba lecsengését, akkor visszacsatolást kell alkalmazni;

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + \ell \underbrace{(y(t) - \hat{y}(t))}_{\text{a kimenet becslési hibája}}$$

ahol $\ell = [\ell_{n-1} \;\; \ell_{n-2} \;\; \ldots \;\; \ell_0]^T$, n dimenziós oszlopvektor (n sora van).

Ekkor az állapothiba

$$
\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\
&= Ax(t) + bu(t) - A\hat{x}(t) - bu(t) - \ell\left(c^T x(t) - c^T\hat{x}(t)\right) \\
&= (A - \ell c^T)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - \ell c^T)e(t),
\end{aligned}
$$

ha adott $e(0) = \hat{e}_0$ akkor $e^{(A-\ell c^T)t}e_0$.

Így az A minden elemét módosítani tudom, és minden sajátértékét tetszőlegesen meg tudom választani.

1. Állítás: *$\lambda_i(A - \ell c^T)$ tetszőlegesen megválasztható egy adott ℓ megfigyelő-erősítés megválasztásával, akkor és csak akkor, ha (c^T, A) megfigyelhető.*

Hasonlóan pl. az állapot visszacsatolás tervezéséhez, ahol a tervezés feltétele volt az (A, b) pár irányíthatósága.

A megfigyelő tervezés és az állapot-visszacsatolt szabályzó tervezése **duális** fogalompárok, melyek egymást kiegészítik.

- Ha az (A, b) irányítható, hozzárendelhetünk egy ún. irányíthatósági állapottér reprezentációt, amely n=2 esetén:

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c_c^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

- Ha a (c^T, A) megfigyelhető, hozzárendelhetünk egy ún. megfigyelhetőségi alakot, amely n=2 esetén:

$$A_o = A_c^T = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix}, b_o = \left(c_c^T\right)^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix},$$

$$c_o^T = b_c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A két felírási mód közöttt a **dualitás** teremt kapcsolatot. A két állapottér ekvivalens állapotterek, melynek bizonyítására írjuk fel az átviteli függvényeiket:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c = c_o^T (sI - A_o)^{-1} b_o$$

$$(sI - A_o)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{adj(sI - A_o)}{det(sI - A_o)} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}}{(s + a_1)s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s+a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{s^2+a_1 s+a_0} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{s^2+a_1 s+a_0} = \frac{b_1 s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}$$

Mely átviteli függvény a (A_o, b_o, c_o^T) reprezentáció átviteli függvénye, és azonos a korábbiakban bizonyított módon az irányíthatósági állapottérből képzett átviteli függvénnyel.

A megfigyelő tervezés adott (A_o, b_o, c_o^T) esetén, az állapot visszacsatolás tervezéséhez (pólusallokáció) hasonlóan az új karakterisztikus polinom $\bar{a}_0,\, \bar{a}_1,\, \ldots,\, \bar{a}_{n-1},$ együtthatóinak ismeretében $\ell_i = \bar{a}_i - a_i$ $(i = 0, \ldots, (n-1))$ megválasztásával lehetséges:

$$\bar{A}_o = A_o - \ell c^T = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_{n-1} \\ \ell_{n-2} \\ \vdots \\ \ell_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Az állapotmegfigyelővel ellátott körben a rendszer

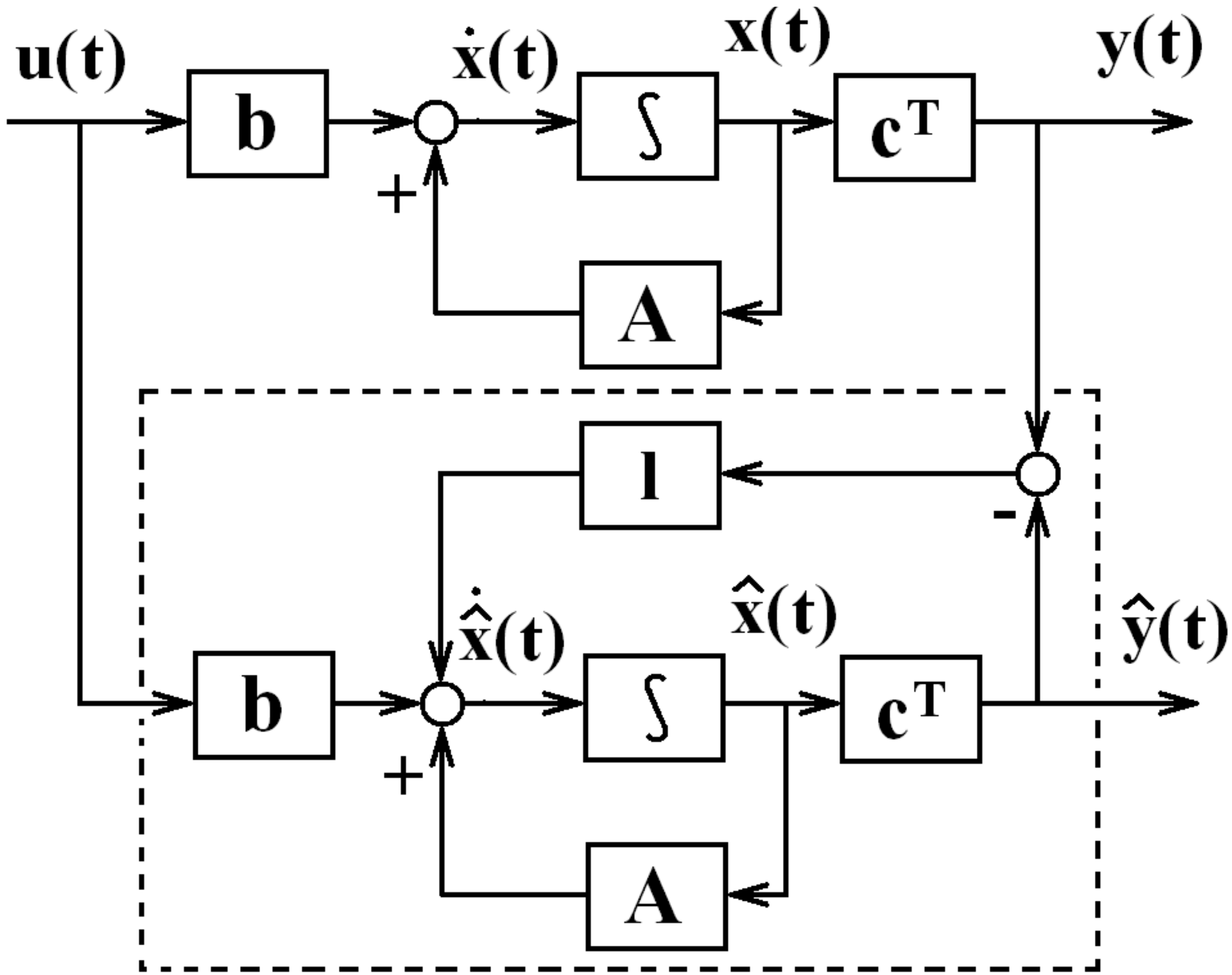
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_o x(t) + b_o u(t)\\ y(t) &= c_o^T x(t),\end{aligned}$$

és a megfigyelő, mint dinamikus rendszer

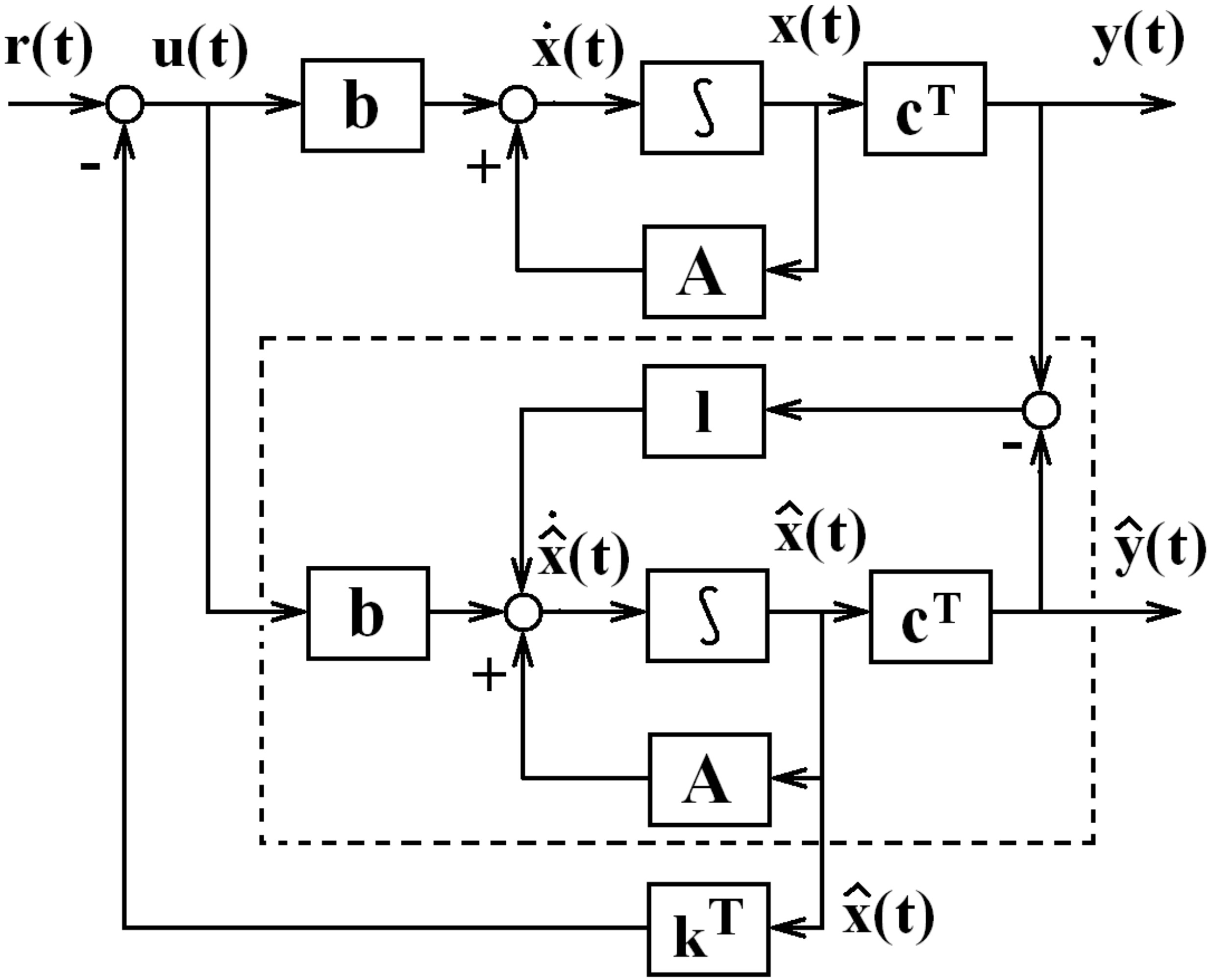
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_o \hat{x}(t) + b_o u(t) + \ell\left(y(t) - \hat{y}(t)\right)\\ \hat{y}(t) &= c_o^T \hat{x}(t)\end{aligned}$$

Ha a szabályozást állapot-visszacsatolással képezzük, abban a becsült állapotot kell felhasználni:

$$u(t) = -k^T \hat{x}(t) + r(t)$$



Állapotmegfigyelő



Állapot-visszacsatolt szabályozási kör állapotmegfigyelővel

2. Állítás: *A megfigyelővel és állapot-visszacsatolt szabályzóval ellátott zárt rendszer karakterisztikus polinomja*

$$det(sI - A_z) = \underbrace{det(sI - A + bk^T)}_{\text{állapot-visszacsatolás}} \cdot \underbrace{det(sI - A + \ell c^T)}_{\text{megfigyelő}}$$

Szeparációs elv: Az állapot-visszacsatolt szabályzó és a megfigyelő függetlenül tervezhető.

Sztochasztikus rendszerek állapota becsülhető Kalman szűrővel, mely az állapotbecslés mellett a rendszerben felmerülő zajok szűrését is lehetővé teszi, az állapot hiba-kovarianciájának minimalizálásával.

Példa: *Tervezzünk állapotmegfigyelőt az inverz inga modellhez!*

M=1 kg, m=0,1 kg, l=0,5 m, és g=10 m/s^2

A megfigyelő pólusai $\bar{p}_{1,2}=-10$ *és* $n=2$.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{1}{-Ml}}{s^2-\frac{g}{l}} = \frac{b_0}{s^2+a_0} \\ b_0 &= \frac{1}{Ml} = 2 \\ a_0 &= -\frac{g}{l} = -20 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

Az inverz inga megfigyelhetőségi alakban felírt állapottér modellje:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}, b_o = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, c_o^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az új karakterisztikus polinom:
$a(s)$=$(s+10)^2$=$s^2+20s+100 \Rightarrow a_1$=20, a_0=100,
amiből következik, hogy az állapotmegfigyelő erősítési mátrixa:

$$\ell_0 = \bar{a}_0 - a_0 = 100 - (-20) = 120$$
$$\ell_1 = \bar{a}_1 - a_1 = 20 - (0) = 20$$