

## Állapotmegfigyelő

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a rendszer állapotát mérni tudjuk. Az állapot ismerete szükséges az állapot-visszacsatolt szabályzó tervezéséhez. Ha nem ismerjük az  $x(t)$  állapotvektort, akkor egy olyan  $\hat{x}(t)$  (azonos dimenziójú) mennyiséget képzünk, mely asszimptotikusan közelíti az eredeti állapotot, tehát  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  miközben  $t \rightarrow \infty$ .

Ha ismert  $(A, b, c^T)$ , akkor

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t),$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t),$$

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0,$$

ahol az állapot-becslés hibája  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

Az állapotbecslés hibájának időbeli változását annak differenciálegyenlete adja meg:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + bu(t) - A\hat{x}(t) - bu(t) \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) = Ae(t), \end{aligned}$$

ahol  $e(0) = \hat{e}_0$  kezdeti értékkel egy homogén lineáris differenciálegyenlet adódik.

Laplace-tartományban:

$$s \cdot E(s) - e_0 = AE(s)$$

$$(sI - A)E(s) = e_0$$

$$E(s) = (sI - A)^{-1}e_0 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}e_0\} = e^{At}e_0$$

Ha  $e_0$  nem zérus, akkor az állapothiba lecseng, feltéve hogy az  $A$  mátrix stabil azaz,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \\ i = 1..n \end{aligned}$$

ahol  $n = \dim(x)$  és így  $e(t) \rightarrow 0$  miközben  $t \rightarrow \infty$ .

Ha  $A$  instabil, illetve ha a tervező befolyásolni akarja az állapothiba lecsengését, akkor visszacsatolást kell alkalmazni;

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + \ell \underbrace{(y(t) - \hat{y}(t))}_{\text{a kimenet becslési hibája}}$$

ahol  $\ell = [\ell_{n-1} \ \ell_{n-2} \ \dots \ \ell_0]^T$ ,  $n$  dimenziós oszlopvektor ( $n$  sora van).

Ekkor az állapothiba

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + bu(t) - A\hat{x}(t) - bu(t) - \ell (c^T x(t) - c^T \hat{x}(t)) \\ &= (A - \ell c^T)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - \ell c^T)e(t),\end{aligned}$$

ha adott  $e(0) = \hat{e}_0$  akkor  $e^{(A - \ell c^T)t} e_0$ .

Így az  $A$  minden elemét módosítani tudom, és minden sajátértékét tetszőlegesen meg tudom választani.

**1. Állítás:**  $\lambda_i(A - \ell c^T)$  tetszőlegesen megválasztható egy adott  $\ell$  megfigyelő-erősítés megválasztásával, akkor és csak akkor, ha  $(c^T, A)$  megfigyelhető.

Hasonlóan pl. az állapot visszacsatolás tervezéséhez, ahol a tervezés feltétele volt az  $(A, b)$  pár irányíthatósága.

A megfigyelő tervezés és az állapot-visszacsatolt szabályzó tervezése **duális** fogalompárok, melyek egymást kiegészítik.



- Ha az  $(A, b)$  irányítható, hozzárendelhetünk egy ún. irányíthatósági állapottér reprezentációt, amely  $n=2$  esetén:

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c_c^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

- Ha a  $(c^T, A)$  megfigyelhető, hozzárendelhetünk egy ún. megfigyelhetőségi alakot, amely  $n=2$  esetén:

$$A_o = A_c^T = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix}, b_o = (c_c^T)^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix},$$
$$c_o^T = b_c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A két felírási mód között a **dualitás** teremt kapcsolatot. A két állapottér ekvivalens állapotterek, melynek bizonyítására írjuk fel az átviteli függvényeiket:

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} = c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c = c_o^T (sI - A_o)^{-1} b_o$$

$$(sI - A_o)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A_o)}{\det(sI - A_o)} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}}{(s + a_1)s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

Mely átviteli függvény a  $(A_o, b_o, c_o^T)$  reprezentáció átviteli függvénye, és azonos a korábbiakban bizonyított módon az irányíthatósági állapottérből képzett átviteli függvénnyel.

A megfigyelő tervezés adott  $(A_o, b_o, c_o^T)$  esetén, az állapot visszacsatolás tervezéséhez (pólusallokáció) hasonlóan az új karakterisztikus polinom  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}$ , együtthatóinak ismeretében  $\ell_i = \bar{a}_i - a_i$  ( $i = 0, \dots, (n-1)$ ) megválasztásával lehetséges:

$$\bar{A}_o = A_o - \ell c^T = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_{n-1} \\ \ell_{n-2} \\ \vdots \\ \ell_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Az állapotmegfigyelővel ellátott körben a rendszer

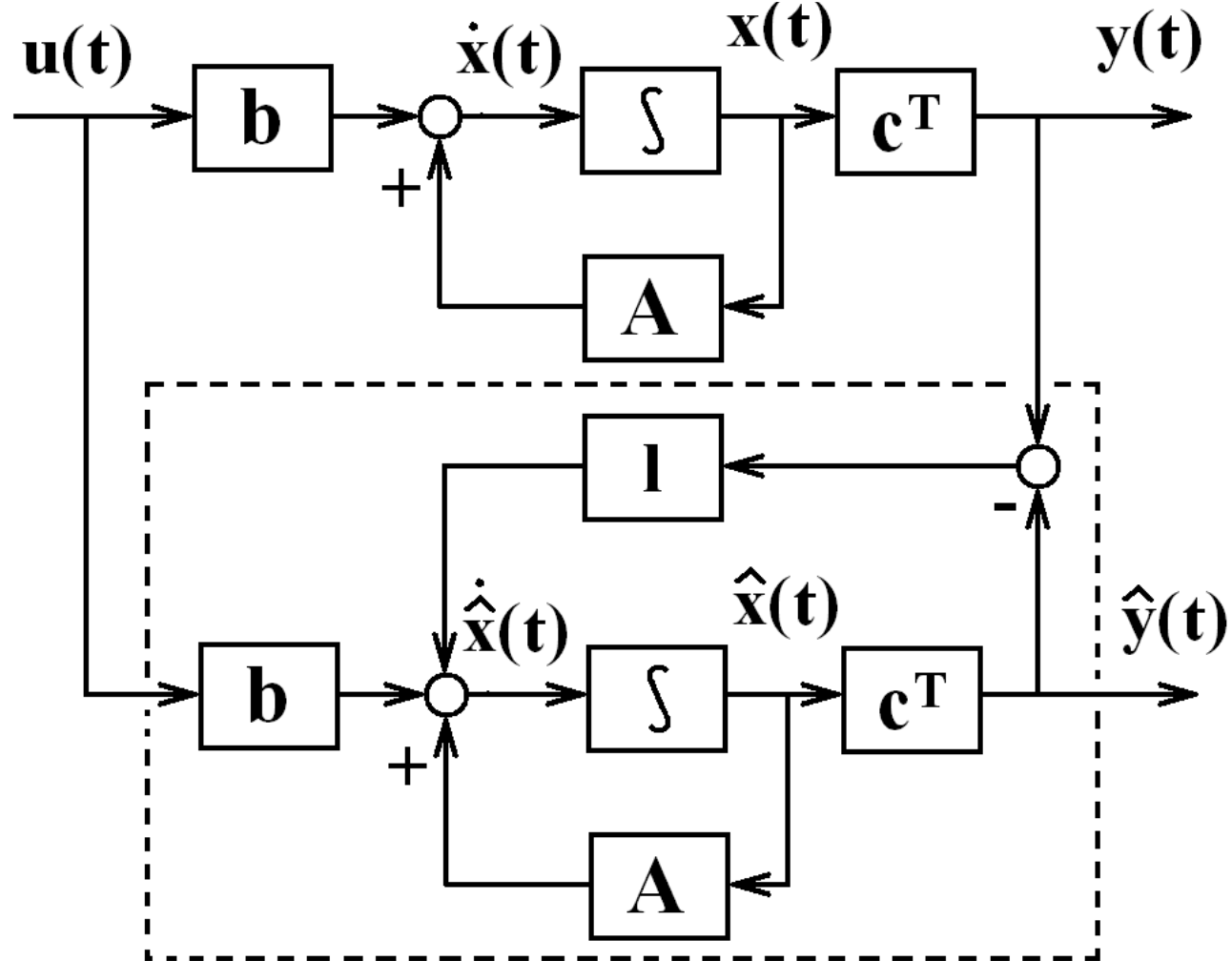
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_o x(t) + b_o u(t) \\ y(t) &= c_o^T x(t),\end{aligned}$$

és a megfigyelő, mint dinamikus rendszer

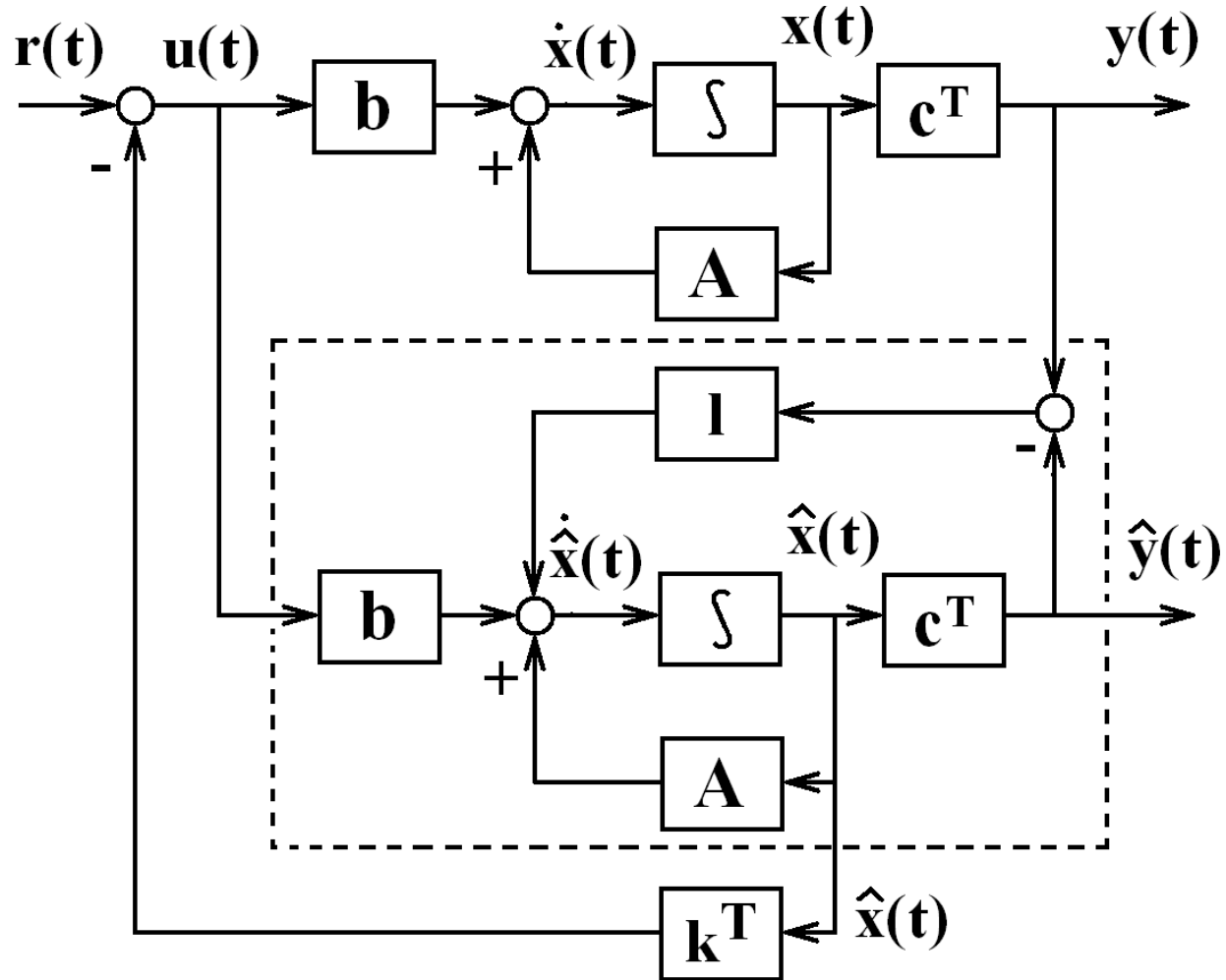
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_o \hat{x}(t) + b_o u(t) + \ell (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= c_o^T \hat{x}(t)\end{aligned}$$

Ha a szabályozást állapot-visszacsatolással képezzük, abban a becsült állapotot kell felhasználni:

$$u(t) = -k^T \hat{x}(t) + r(t)$$



Állapotmegfigyelő



## Állapot-visszacsatolt szabályozási kör állapotmegfigyelővel



**2. Állítás:** *A megfigyelővel és állapot-visszacsatolt szabályzóval ellátott zárt rendszer karakterisztikus polinomja*

$$\det(sI - A_z) = \underbrace{\det(sI - A + bk^T)}_{\text{állapot-visszacsatolás}} \cdot \underbrace{\det(sI - A + \ell c^T)}_{\text{megfigyelő}}$$

**Szeperációs elv:** Az állapot-visszacsatolt szabályzó és a megfigyelő függetlenül tervezhető.

Sztochasztikus rendszerek állapota becsülhető Kalman szűrővel, mely az állapotbecslés mellett a rendszerben felmerülő zajok szűrését is lehetővé teszi, az állapot hiba-kovarianciájának minimalizálásával.

**Példa:** *Tervezzünk állapotmegfigyelőt az inverz inga modellhez!*

$M=1$  kg,  $m=0,1$  kg,  $l=0,5$  m, és  $g=10$  m/s<sup>2</sup>

A megfigyelő pólusai  $\bar{p}_{1,2}=-10$  és  $n=2$ .

$$G(s) = \frac{\frac{1}{-Ml}}{s^2 - \frac{g}{l}} = \frac{b_0}{s^2 + a_0}$$

$$b_0 = \frac{1}{Ml} = 2$$

$$a_0 = -\frac{g}{l} = -20$$

$$a_1 = 0$$

Az inverz inga megfigyelhetőségi alakban felírt állapottér modellje:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}, b_o = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, c_o^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az új karakterisztikus polinom:

$$a(s) = (s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100 \Rightarrow a_1 = 20, a_0 = 100,$$

amiből következik, hogy az állapotmegfigyelő erősítési mátrixa:

$$\ell_0 = \bar{a}_0 - a_0 = 100 - (-20) = 120$$

$$\ell_1 = \bar{a}_1 - a_1 = 20 - (0) = 20$$