1. **Állapotegyenletek megoldása**
2. Állapot visszacsatolás (pólusallokáció)

Tekintsük az $\dot{x}(t) = ax(t)$, $x(0) = 1$ differenciálegyenletet.

Ismert, hogy a megoldás függvény $x(t) = e^{at}$ alakú. Hasonló alakú megoldást kapunk akkor is ha $x(t) \in \mathbb{R}^n$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Az $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ homogén diff. egyenlet megoldása:

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

ahol az e^{At} exponenciális mátrixfüggvényt a következőképpen értelmezzük:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots,$$

az $e^{at} = 1 + at + a^2t^2/2! + \dots$ hatványsorral való analógia alapján.

Diagonál reprezentációknál $e^{A_d t}$ alakja igen egyszerű. Legyen $A_d \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ekkor

$$e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Az inhomogén

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

egyenlet megoldása a következő:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= c^T x(t). \end{aligned}$$

Ebből a konvolúciós integrálból közvetlenül látható, hogy a rendszer súlyfüggvényét az állapottér reprezentáció ismeretében a következőképp kapjuk:

$$g(t) = c^T e^{At} b.$$

1. Állapotegyenletek megoldása
2. **Állapot visszacsatolás (pólusallokáció)**

Adott egy rendszer n-dimenziós (A, b, c^T) állapottér reprezentációja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x. \end{aligned}$$

A rendszer karakterisztikus polinomja:

$$a(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0.$$

Cél: módosítsuk a rendszer dinamikáját az $x(t)$ állapot visszacsatolásával, azaz legyen a bemenőjel

$$u = -k^T x + r,$$

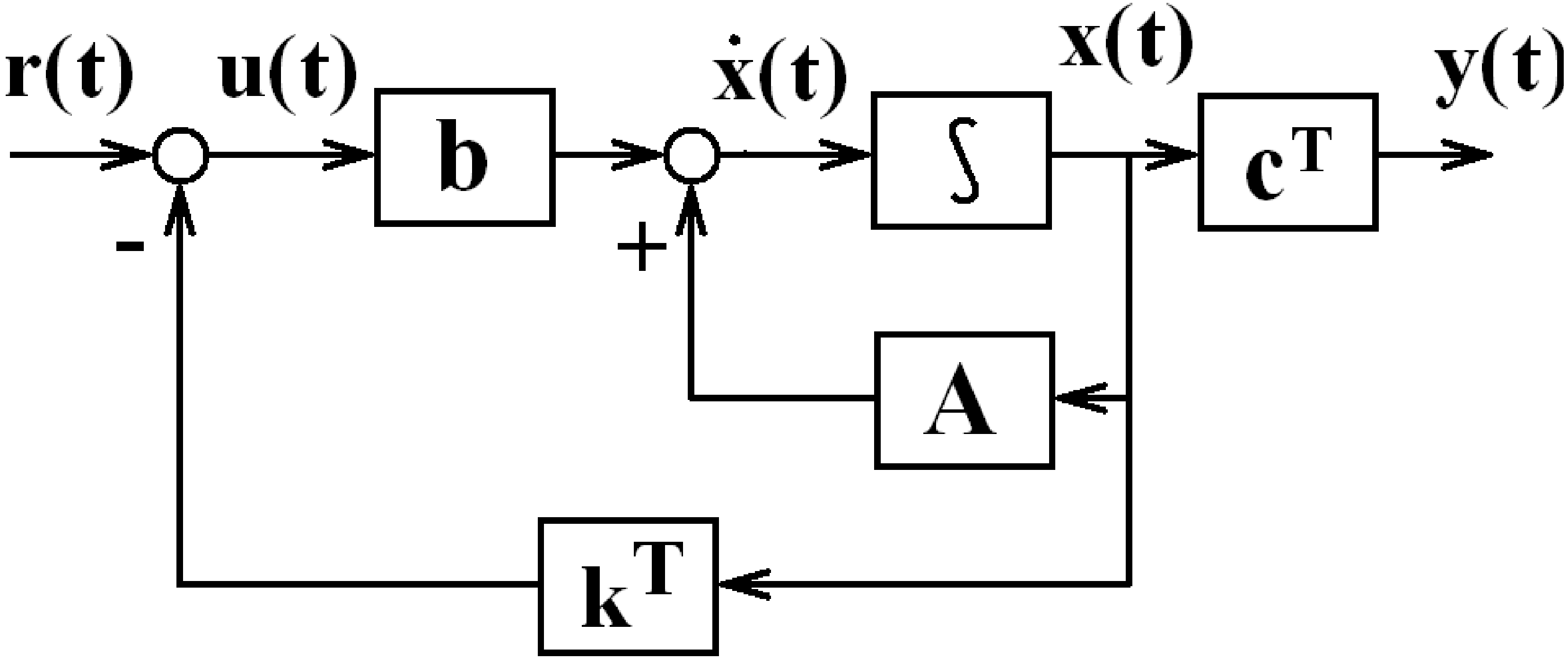
ahol:

$r(t)$ egy külső referencia jel,

k^T a visszacsatolás erősítési tényezőinek sorvektora:

$$k^T = \begin{bmatrix} k_{n-1} & \dots & k_0 \end{bmatrix}.$$

A visszacsatolt (zárt) rendszer blokkdiagramja:



Behelyettesítve a bemenőjel alakját az állapotegyenletbe, a zárt rendszer állapotegyenlete a következő lesz:

$$\dot{x} = Ax + b(-k^T x + r),$$
$$\dot{x} = \left(A - bk^T\right) x + br,$$
$$y = c^T x,$$

amiből a zárt rendszer karakterisztikus polinomjára azt kapjuk, hogy

$\bar{a}(s) = \det(sI - A + bk^T) = s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 s + \bar{a}_0.$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a k erősítés megfelelő megválasztásával a zárt rendszer karakterisztikus polinomja tetszőlegesen beállítható, ha az (A, b, c^T) rendszer irányítható. Mivel minden irányítható állapottér reprezentáció irányítható alakra hozható, tegyük fel, hogy a rendszert irányítható alakra hoztuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + b_c u \\ y &= c_c^T x_c. \end{aligned}$$

Ekkor az $\dot{x}_c = \left(A_c - b_c k_c^T\right) x_c + br$ egyenletben

$$A_c - b_c k_c^T = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{c_{n-1}} & \dots & k_{c_0} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(a_{n-1} + k_{c_{n-1}}) & \dots & -(a_1 + k_{c_1}) & -(a_0 + k_{c_0}) \\ 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

amiből következik, hogy

$$\bar{a}(s) = \det(sI - A_c + b_c k_c^T)$$

$$= s^n + (a_{n-1} + k_{c_{n-1}})s^{n-1} + \ldots + (a_1 + k_{c_1})s + (a_0 + k_{c_0}),$$

tehát a zárt rendszer karakterisztikus polinomjának $\bar{a}_i$, $(i = 0, \ldots, n-1)$ együtthatóit előírva ehhez a k vektor elemei meghatározhatók:

$$\bar{a}_i = a_i + k_{c_i} \implies k_{c_i} = \bar{a}_i - a_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Ha a zárt rendszer pólusait előírjuk, akkor rögzítjük a $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ pólusokat, amiből az $\bar{a}(s)$ karakterisztikus polinomot

$$\bar{a}(s) = (s - \bar{p}_1) \cdot \ldots \cdot (s - \bar{p}_n)$$

alakban számítjuk.

Ezzel az eljárással az irányíthatósági alakra vonatkozó k_c^T erősítés vektort tetszőlegesen előírt $\bar{a}(s)$ karakterisztikus polinomhoz meg tudjuk határozni.

Ha a rendszer irányítható, de nem irányíthatósági alakban adott, akkor egy T_c nemszinguláris transzformációs mátrix segítségével irányíthatósági alakra hozható.

Az irányíthatósági alakban jelöljük A_c és b_c-vel az állapotdinamikai egyenlet mátrixait. A tervezés ebben az irányíthatósági alakban történik.
A tervezett k_c^T erősítést azonban vissza kell transzformálni az eredeti rendszer állapotterére!

A visszatranszformálás összefüggése:

$$k^T = k_c^T \cdot T_c$$

Az állapot visszacsatolás tervezési lépései:

1. A rendszer irányíthatóságának ellenőrzése

2. Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomjának számítása: $a(s) = det\,(sI - A)$

3. A T_c irányíthatósági alakba transzformáló mátrix meghatározása

4. Az új $\bar{p}_i$ pólusok előírása, a szabályozott rendszer karakterisztikus polinomjának kiszámítása: $\bar{a}(s) = (s-\bar{p}_1)\cdot\ldots\cdot(s-\bar{p}_n)$

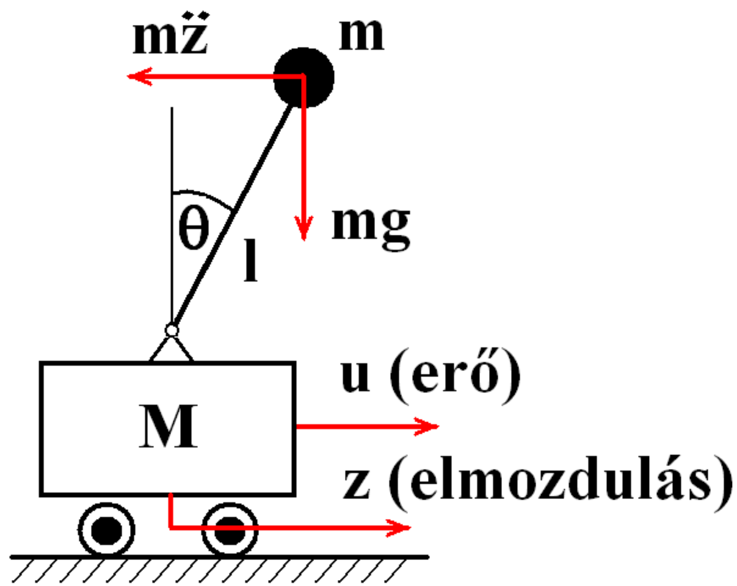
5. Az irányíthatósági alakra vonatkozó erősítések számítása: $k_{c_i} = \bar{a}_i - a_i$

6. A kapott erősítés vektor visszatranszformálása az eredeti állapottérbe: $k^T = k_c^T \cdot T_c$

7. A zárt, szabályozott rendszer időtartományi viselkedésének elemzése

Inverz inga egyszerűsített modellje

Az inverz inga egy M tömegű kocsira rögzített csapágyon szabadon elforgó rúd, melynek m tömege a rúd középpontjába van redukálva.



Az inverz inga mint dinamikus rendszer súlyfüggvényének és átviteli függvényének levezetéséhez a Newton mozgásegyenletekből indulunk ki, amelyeket az M és m tömegekre írunk fel.

Példa: Inverz inga szabályozása pólusallokációval

Az inverz inga u bemenőjele (horizontális erő) és θ kimenőjele (szögelfordulás) közötti átviteli függvény.

$$\theta(s) = \frac{-1/Ml}{s^2 - a_0} U(s), \quad a_0 = \frac{(M+m)g}{Ml} \approx \frac{g}{l} > 0,$$

ahol M – a kocsi tömege

m – az inga tömege

l – az inga hossza.

A rendszer pólusai: $p_{1,2} = \pm\sqrt{a_0}$. Az inverz inga instabil, de ha irányítható, akkor pólusallokációval stabilizálhatjuk.

Az inga irányíthatósági állapottér reprezentációja:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

irányíthatósági mátrixa:

$$\mathcal{C}_2(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tehát $\operatorname{rang} \mathcal{C}_2(A_c, b_c) = 2$, így az inga irányítható, állapot visszacsatolással stabilizálható.

Megjegyzés: az a rendszer, aminek létezik irányíthatósági állapottér reprezentációja, eleve irányítható!

Legyen $l = 9.81\mathrm{m}$, ekkor $a(s) = s^2 - a_o = s^2 - 1$ és írjuk elő, hogy a zárt rendszernek két valós pólusa legyen, pl. $\bar{p}_1 = -1$ és $\bar{p}_2 = -2$!

A $\bar{a}(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$, így $\bar{a}_1 = 3$, $\bar{a}_0 = 2$.

Az állapot erősítés tehát:

$$k_1 = \bar{a}_1 - a_1 = 3, \quad k_0 = \bar{a}_0 - a_0 = 2 - (-1) = 3.$$

Ellenőrzésképpen a visszacsatolt rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{aligned}\det\left(sI - A_c + b_c k^T\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{pmatrix} = s^2 + 3s + 2,\end{aligned}$$

a zárt rendszer pólusai tehát valóban stabilak és
$\bar{p}_1 = -1$, $\bar{p}_2 = -2$.

Az inverz inga összetett mechanikai modellje:

$$\ddot{z} = -\frac{m}{M} \cdot g \cdot \theta + \frac{1}{M} u$$
$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{M \cdot l} \theta - \frac{1}{M \cdot l} u$$

Válasszuk meg az állapotvektort és a rendszer kimenetét a következő módon:

$$x = \begin{bmatrix} z & \dot{z} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$$
$$y = z$$

Így az inverz inga állapotdinamikai és megfigyelési egyenletei:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Helyettesítsük be az $M = 2kg,\ m = 0,1kg$ és $l = 0,5m$ paramétereket!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4903 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20,594 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az irányíthatósági mátrix:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0,4903 \\ 0,5 & 0 & 0,4903 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -20,594 \\ -1 & 0 & -20,594 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $det(\mathcal{C}) = 96,1714 \neq 0$ tehát az inga irányítható, állapot visszacsatolással stabilizálható.

2. Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja: $a(s) = s^4 - 20,594s^2$, pólusai pedig:

$0, \quad 0, \quad 4.5381, \quad -4.5381$

3. Az irányíthatósági alakba vivő transzformációs mátrix:

$$T_c = (\mathcal{C} \cdot \mathcal{T})^{-1} \qquad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -20,594 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -20,594 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0,102 & 0 & -0,051 \\ -0,102 & 0 & -0,051 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Tervezés kétféle pólus konfigurációra:

$$p_1 = [-5 \quad -5 \quad -2+3,46i \quad -2-3,46i]$$
$$p_2 = [-4,5381 \quad -4,5381 \quad -2 \quad -2]$$

$$\bar{a}_1(s) = s^4 + 14s^3 + 80,9716s^2 + 259,716s + 399,29$$
$$\bar{a}_2(s) = s^4 + 13,0762s^3 + 60,8992s^2 + 118,6822s + 82,3774$$

5. Erősítések irányíthatósági alakban:

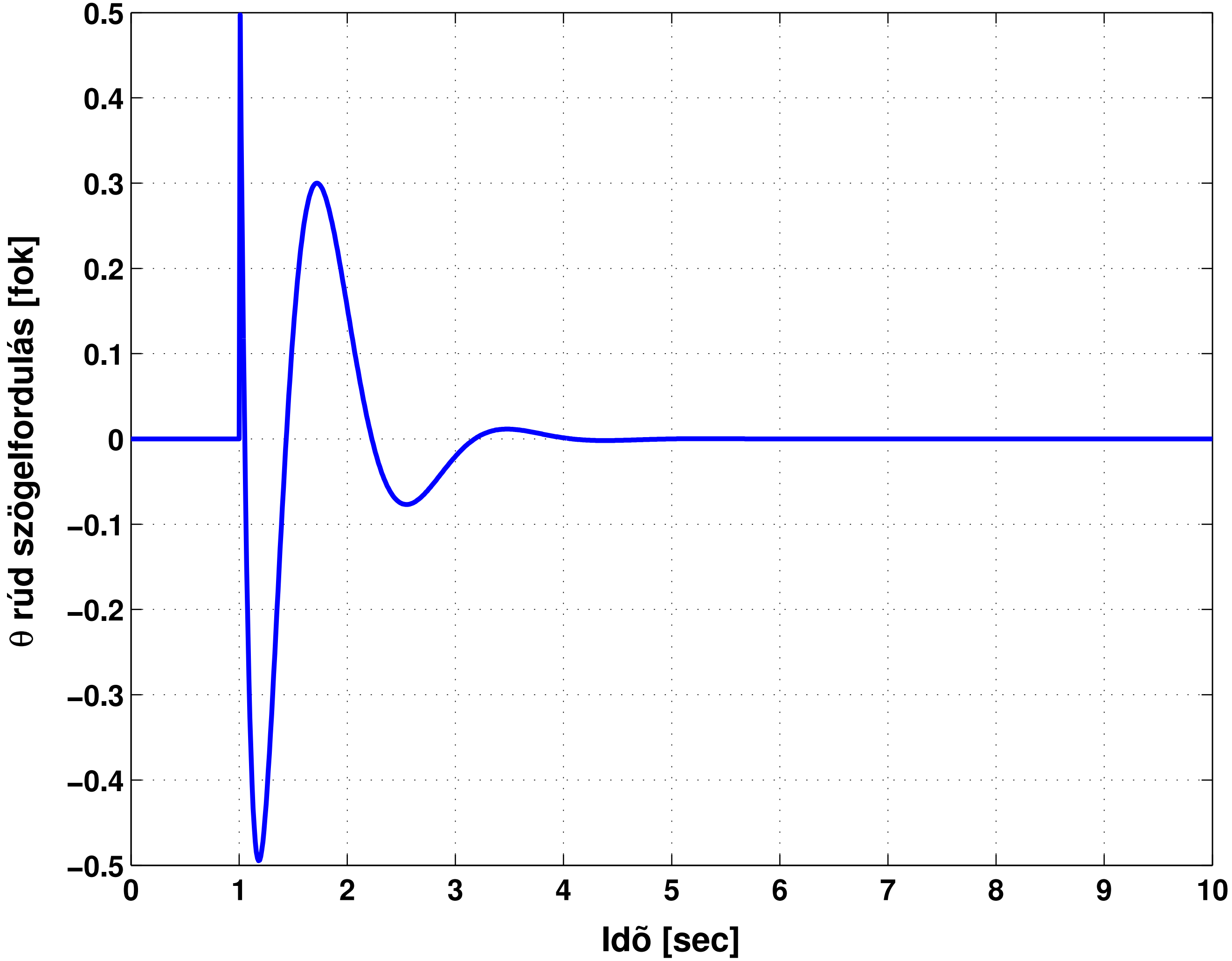
$$k_{c_1}^T = [14 \quad 101,5656 \quad 259,716 \quad 399,29]$$
$$k_{c_2}^T = [13,0762 \quad 81,4932 \quad 118,6822 \quad 82,3774]$$

6. Erősítések visszatranszformált alakban:

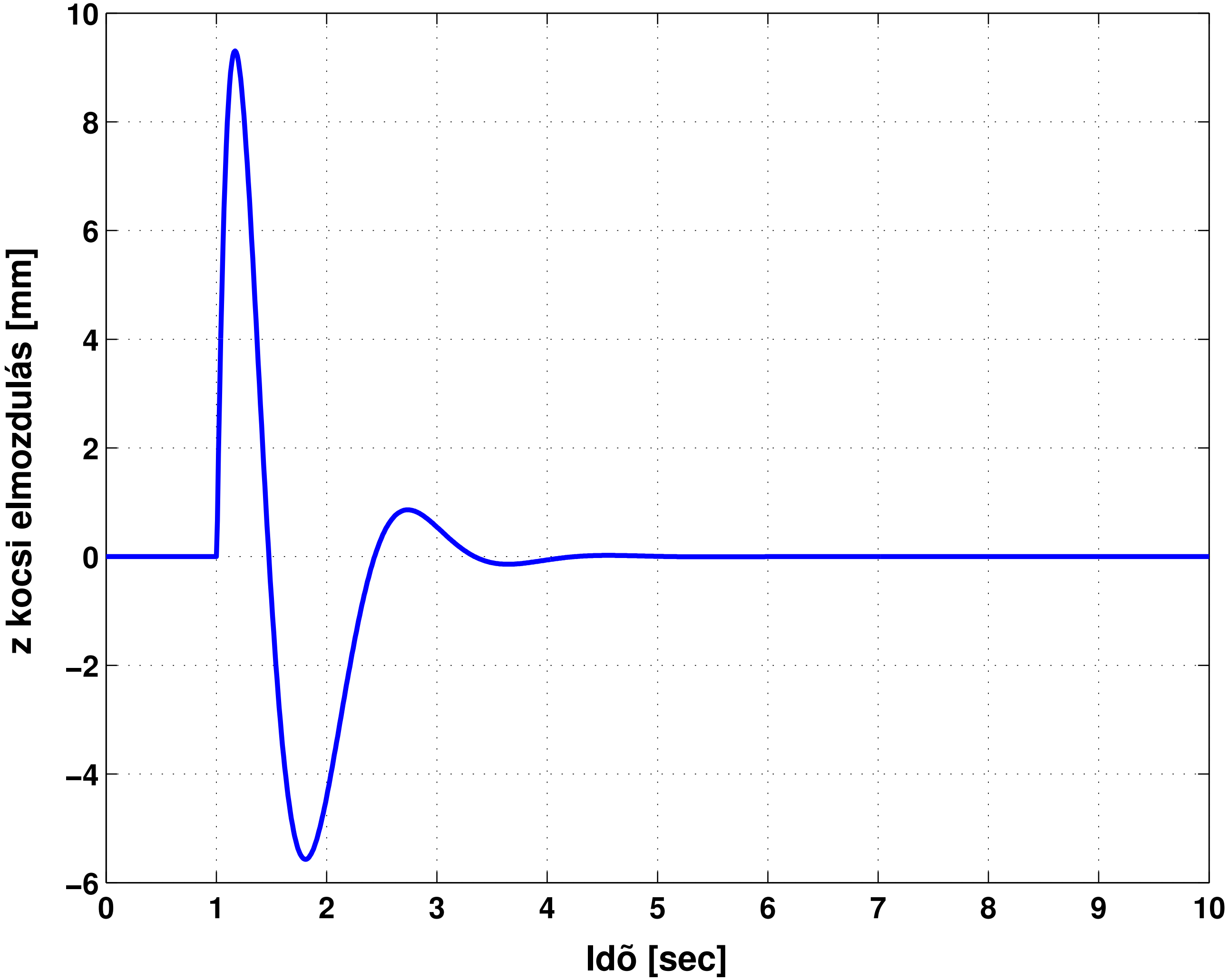
$$k_1^T = [-40,7160 \quad -26,4835 \quad -121,9236 \quad -27,2418]$$
$$k_2^T = [-8,4001 \quad -12,1022 \quad -85,6932 \quad -19,1273]$$

7. Elemzés időtartományban, az 1. másodpercben Dirac δ gerjesztést adva a rúd szögsebességére (”pöckölés”):

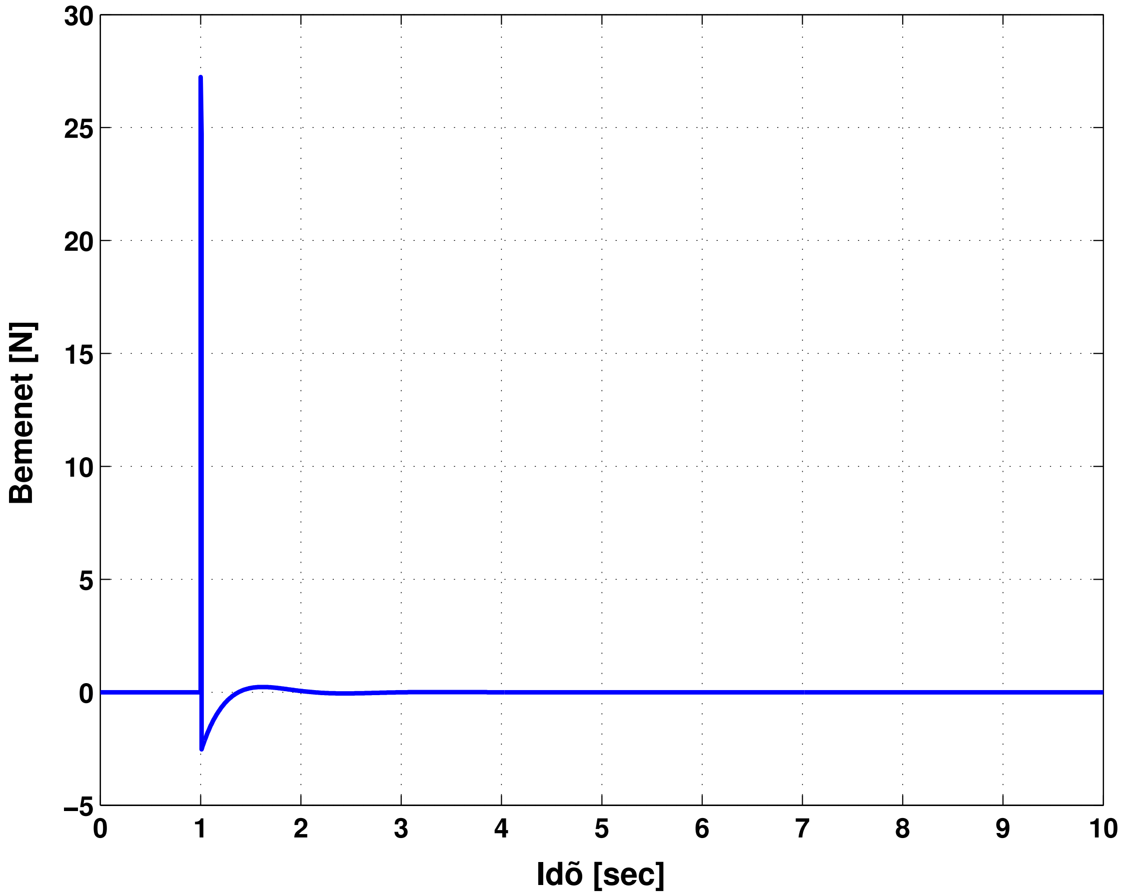
A rúd θ szögelfordulása az első esetben:



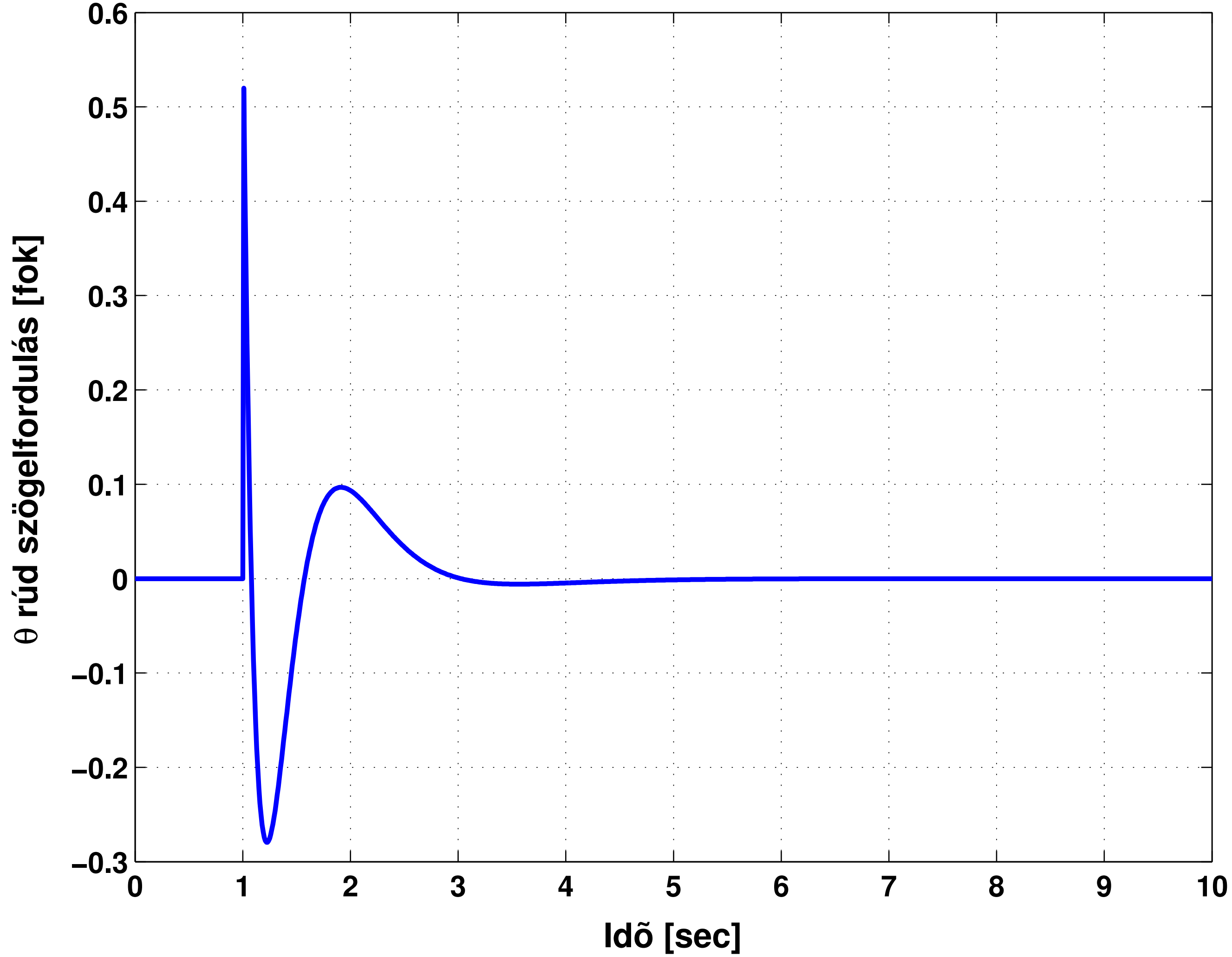
A kocsi z elmozdulása az első esetben:



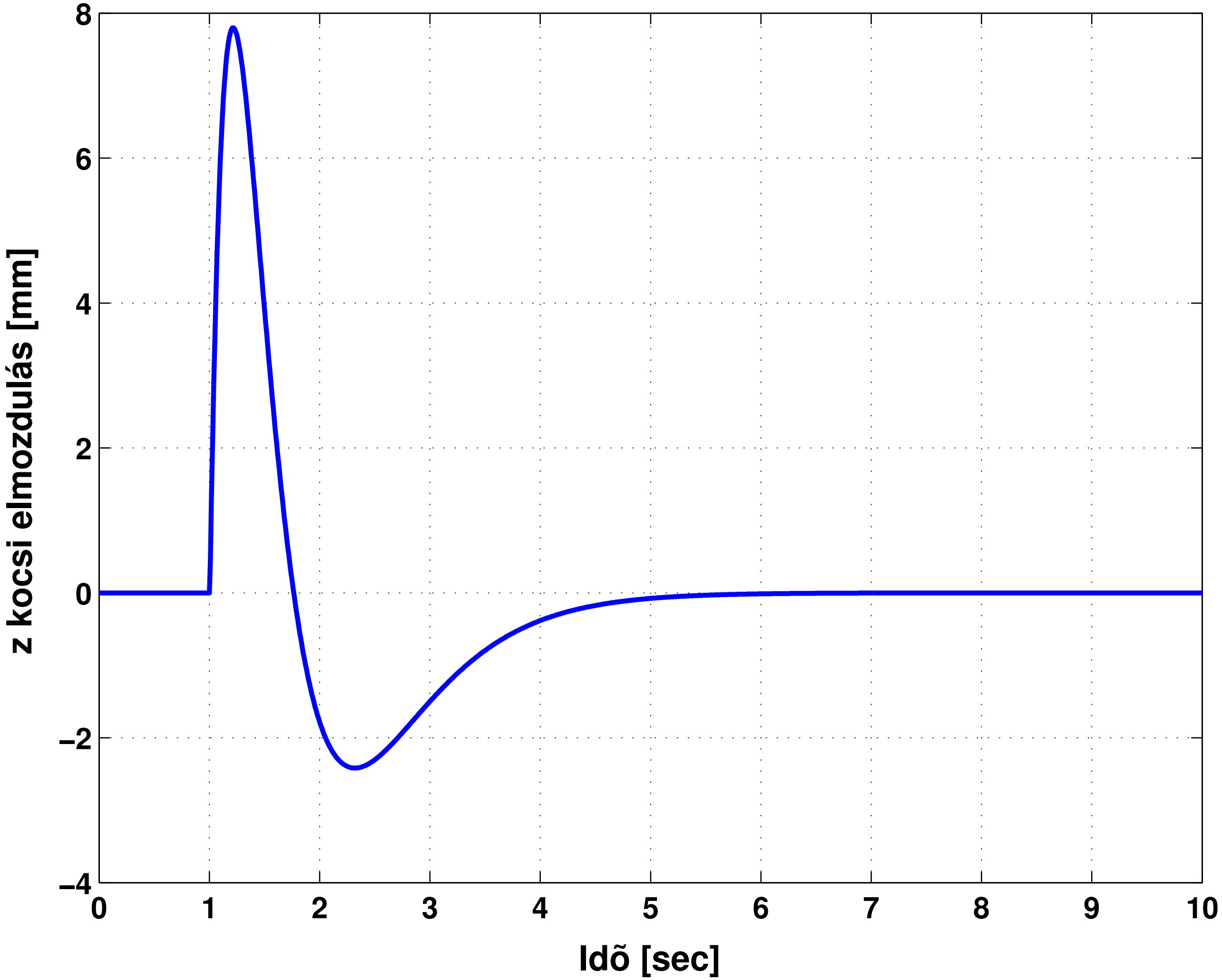
A rendszer bemenetének alakulása az első esetben:



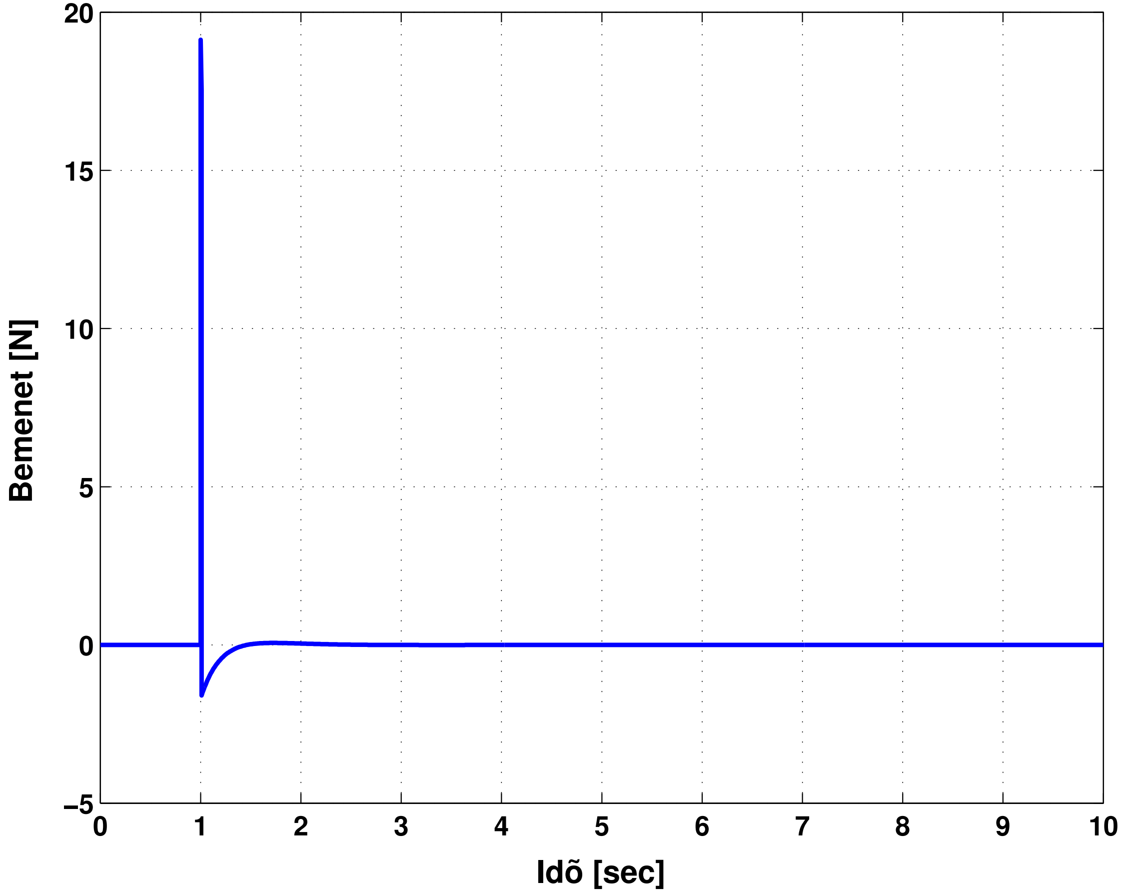
A rúd θ szögelfordulása a második esetben:



A kocsi z elmozdulása a második esetben:



A rendszerbemenet alakulása a második esetben:



Látható, hogy a második esetben kisebbek a túllendülések mind θ-t, mind z-t tekintve és a rendszer bemenetének maximális értéke is kisebb (ahogy a k^T erősítés vektor elemei is kisebbek). Ez annak köszönhető, hogy a komplex konjugált pár helyett csak a valós részeket használtuk a második esetben és a valós pólusokat is közelebb helyeztük el a 0-hoz.

Jól megfigyelhető az is, hogy a komplex konjugált pár lengőrendszert jelent.
Az első esetben minden jellemző több lengésen keresztül áll csak be zérus értékűre.
Ezzel szemben a második esetben a csak valós pólusok egyszeri lengés után aszimptotikus beállást eredményeznek.