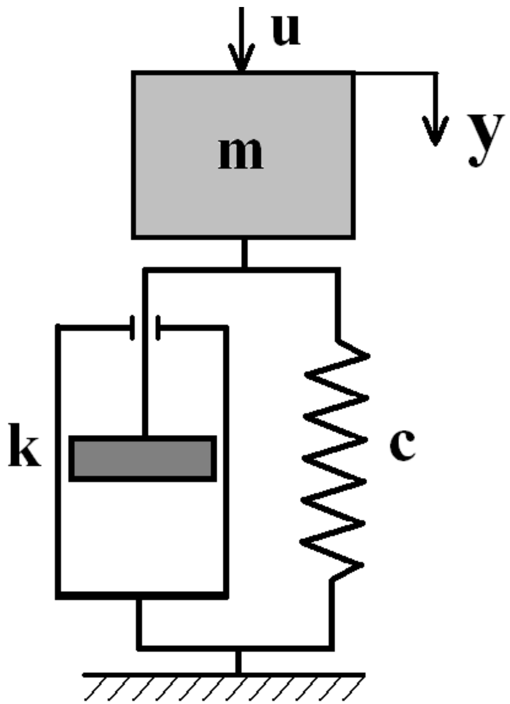
Bevezetés az állapottér elméletbe: Állapottér reprezentációk vizsgálata

1. **Példa az állapottér reprezentációk megválasztására**
2. Átviteli függvény és állapottér reprezentációk közötti kapcsolatok
3. Irányíthatósági és diagonális alakok előállítása hasonlósági transzformációval
4. Demonstrációs példa

Egyszerűsített felfüggesztési modell



Dinamikus diff. egyenlet

$$m\ddot{y} = u - cy - k\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}\dot{y} - \frac{c}{m}y + \frac{1}{m}u$$

$m = 1kg$ a kocsi tömege,
$k = 4\frac{Ns}{m}$ a csillapítási tényező,
$c = 3\frac{N}{m}$ a rugóállandó.

Behelyettesítve: $\ddot{y} = -4\dot{y} - 3y + u$

Állapottér választás:

1. módszer (fázisváltós alak)

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

Állapotegyenletek:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -4\dot{y} - 3y + u = -4x_2 - 3x_1 + u$$

$$y = x_1$$

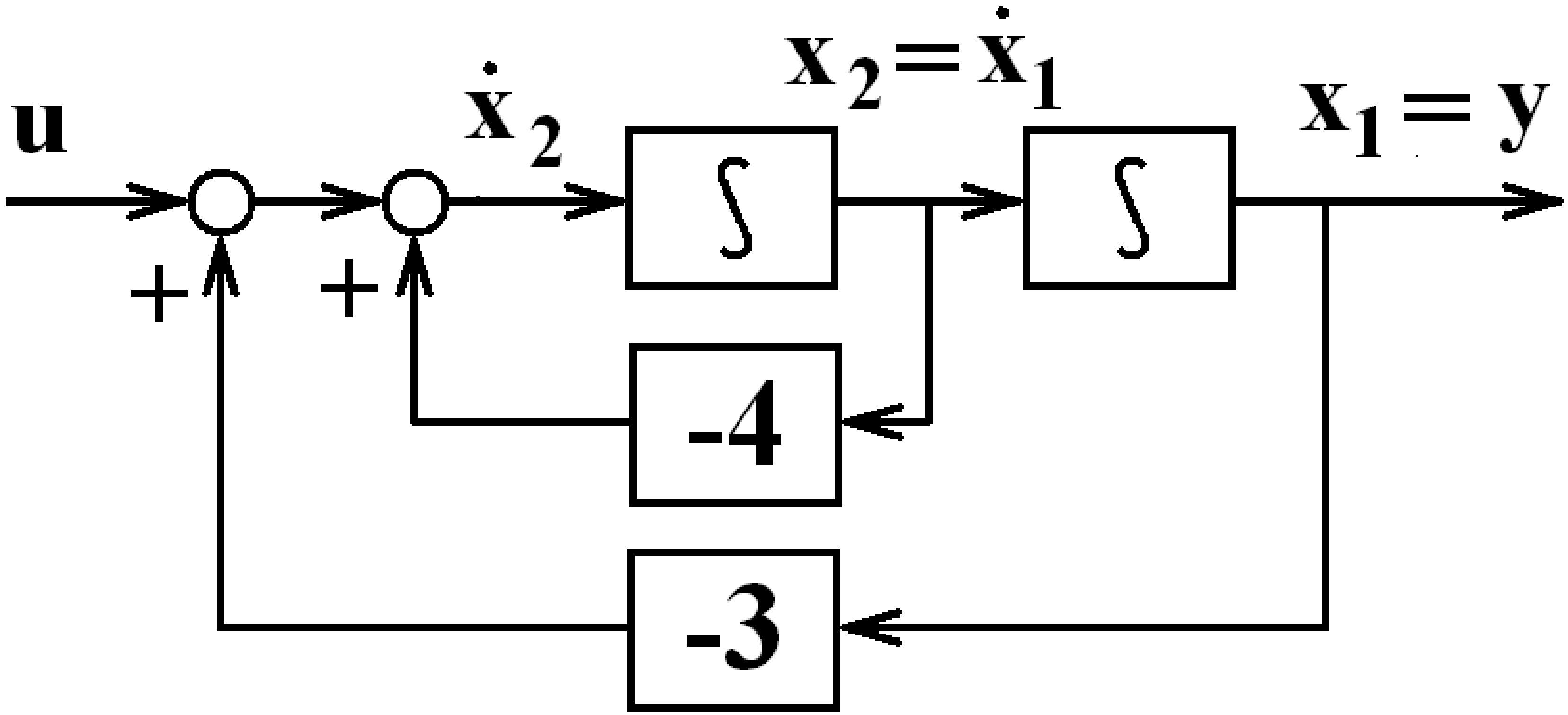
Állapottér reprezentáció:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Állapottér reprezentáció:

1. módszer



Állapottér választás:

2. módszer

$$x_1 = 3y$$

$$x_2 = 4\dot{y}$$

Állapotegyenletek:

$$\dot{x}_1 = 3\dot{y} = \tfrac{3}{4}x_2$$

$$\dot{x}_2 = 4\ddot{y} = -16\dot{y} - 12y + 4u = -4x_2 - 4x_1 + 4u$$

$$y = \tfrac{1}{3}x_1$$

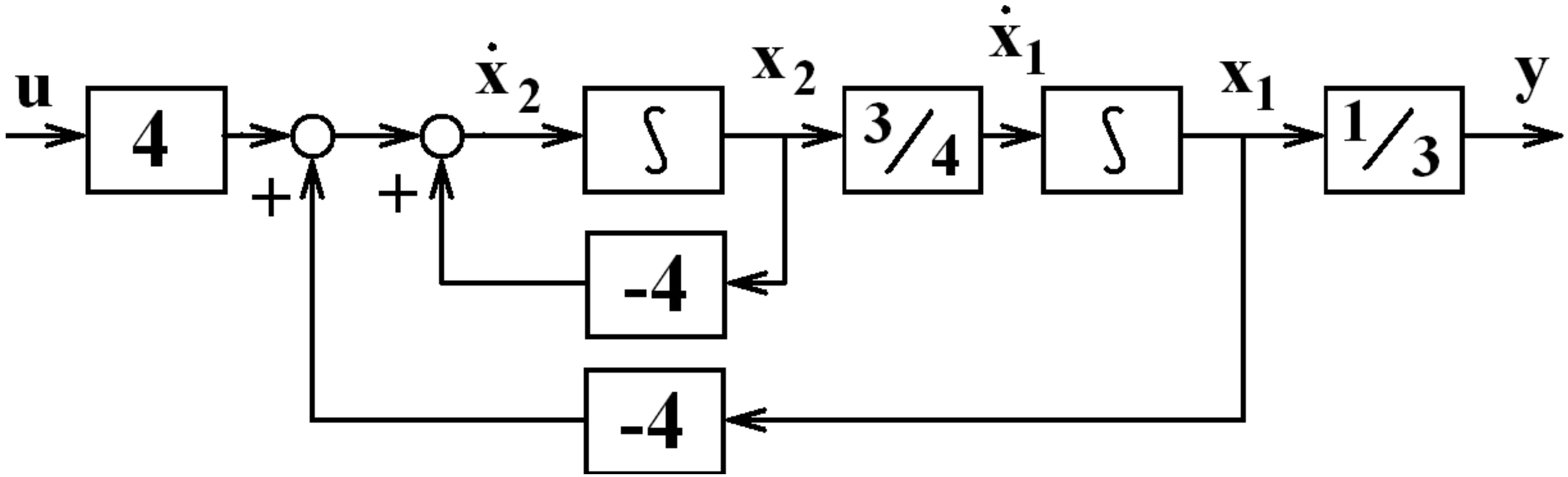
Állapottér reprezentáció:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Állapottér reprezentáció:

2. módszer



Állapotegyenletek:

3. módszer

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 5x_3 + u$$

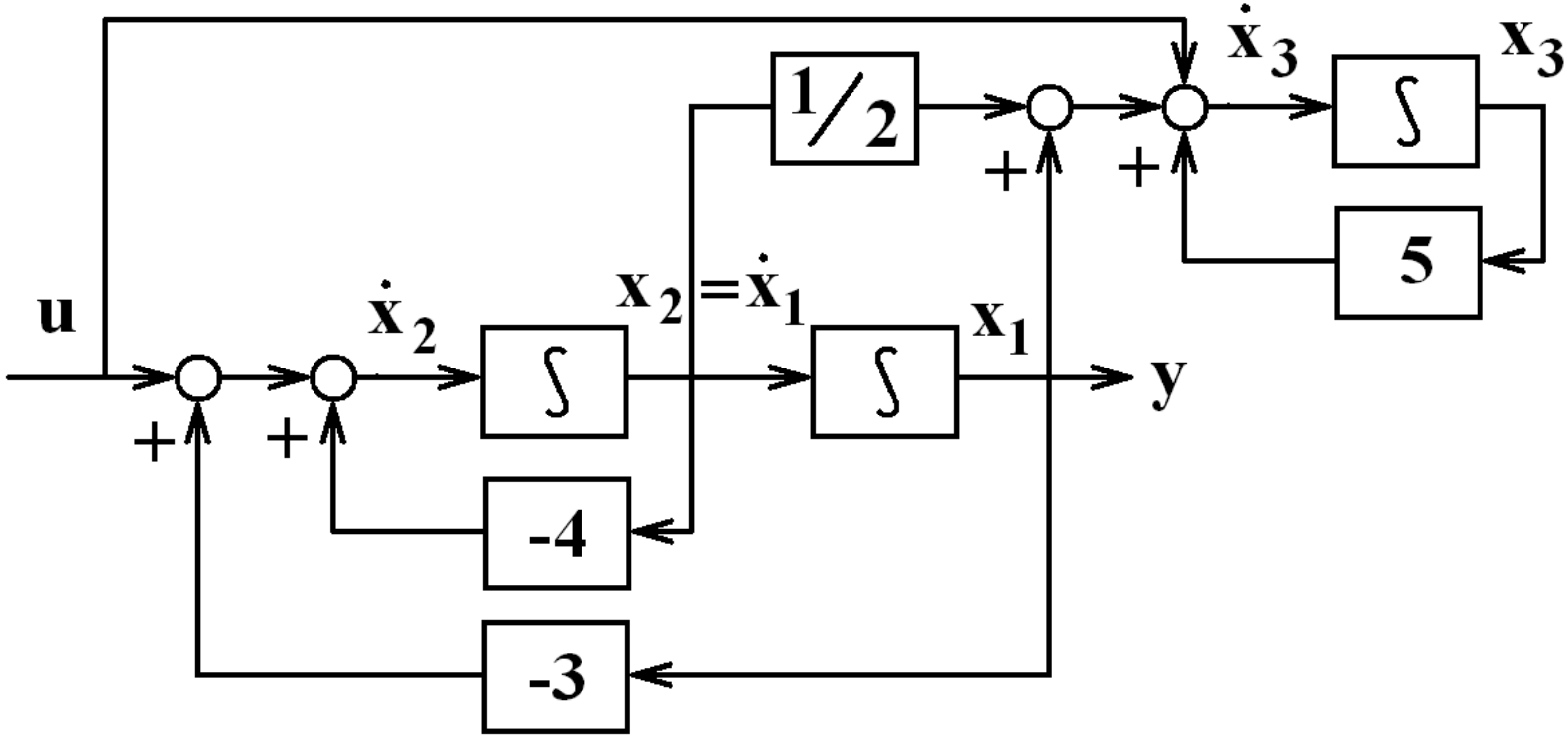
$$y = x_1$$

Állapottér reprezentáció:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

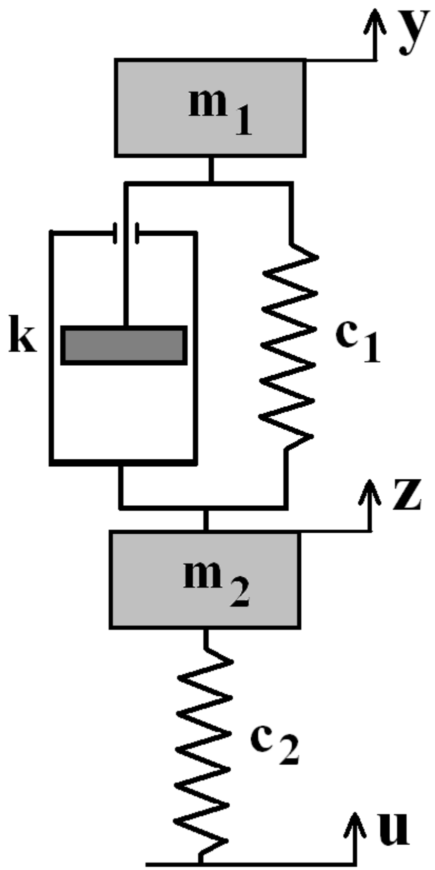
Állapottér reprezentáció: 3. módszer



Következtetések:

- A bemenőjelek és kimenőjel közötti kapcsolat többféle alakban felírható.
- Az állapottér reprezentáció függ az állapotváltozók megválasztásától (számától).
- Az állapottér reprezentációk nem egyértelműek.

Negyedjármű modell



Dinamikus diff.egyenlet:

$$m_1\ddot{y} + k(\dot{y} - \dot{z}) + c_1(y - z) = 0$$

$$m_2\ddot{z} + k(\dot{y} - \dot{z}) + c_1(y - z) = c_2(u - z)$$

Adatok:

$$m_1 = 200kg,\ m_2 = 40kg,$$

$$k = 500\frac{Ns}{m},$$

$$c_1 = 9000\frac{N}{m},\ c_2 = 20000\frac{N}{m}.$$

Dinamikus egyenletek:

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m_1}\dot{y} - \frac{c_1}{m_1}y + \frac{k}{m_1}\dot{z} + \frac{c_1}{m_1}z$$

$$\ddot{z} = \frac{k}{m_2}\dot{z} + \frac{c_1}{m_2}z - \frac{c_2}{m_2}z - \frac{k}{m_2}\dot{y} - \frac{c_1}{m_2}y + \frac{c_2}{m_2}u$$

Behelyettesítve:

$$\ddot{y} = -2.5\dot{y} - 45y + 2.5\dot{z} + 45z$$

$$\ddot{z} = 12.5\dot{z} - 275z - 12.5\dot{y} - 225y + 500u$$

Állapottér választás:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = \dot{z}$$

Állapotegyenletek:

$$\dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -2.5\dot{y} - 45y + 2.5\dot{z} + 45z$$

$$\dot{x}_3 = \dot{z}$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{z} = 12.5\dot{z} - 275z - 12.5\dot{y} - 225y + 500u$$

Állapottér reprezentáció:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2.5x_2 - 45x_1 + 2.5x_4 + 45x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = 12.5x_4 - 275x_3 - 12.5x_2 - 225x_1 + 500u$$

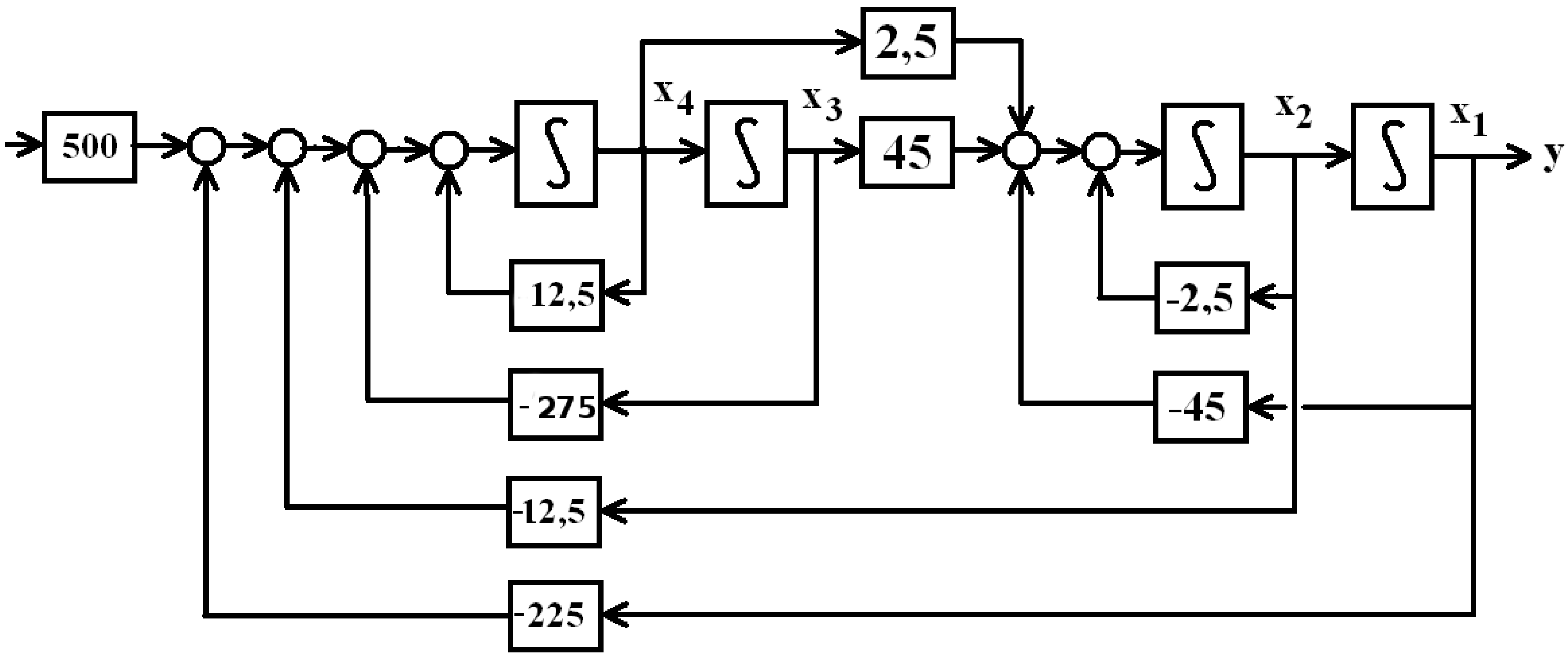
$$y = x_1$$

Állapottér reprezentáció:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -2.5 & 45 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -225 & -12.5 & -275 & 12.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Állapottér reprezentáció:



Bevezetés az állapottér elméletbe: Állapottér reprezentációk vizsgálata

1. Példa az állapottér reprezentációk megválasztására
2. **Átviteli függvény és állapottér reprezentációk közötti kapcsolatok**
3. Irányíthatósági és diagonális alakok előállítása hasonlósági transzformációval
4. Demonstrációs példa

Állapottér reprezentáció

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x$$

Alkalmazzuk a Laplace transzformációt az állapot-egyenletre:

$$sX = AX + bU$$
$$X = (sI - A)^{-1} bU$$

és a kimeneti egyenletre:

$$Y = c^T X = c^T (sI - A)^{-1} bU$$

Átviteli függvény:

$$G = \frac{Y}{U} = c^T (sI - A)^{-1} b$$

Példa

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

Átviteli függvény:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Átviteli függvény:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 4 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s & -4 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}}{s^2+2s+4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2+2s+4} = \frac{2}{s^2+2s+4}$$

Bevezetés az állapottér elméletbe: Állapottér reprezentációk vizsgálata

1. Példa az állapottér reprezentációk megválasztására
2. Átviteli függvény és állapottér reprezentációk közötti kapcsolatok
3. **Irányíthatósági és diagonális alakok előállítása hasonlósági transzformációval**
4. Demonstrációs példa

Hasonlósági transzformáció

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy adott x állapotvektorból egy új $\bar{x}$ állapotvektort képezünk:

$$\bar{x} = Tx$$

ahol $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy $n \times n$ méretű nemszinguláris transzformációs mátrix, és $\bar{x}, x \in \mathbb{R}^n$.

Az x állapotvektor által leírt (A, b, c^T) állapottér reprezentáció:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x, \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\bar{x}$ állapotvektorhoz tartozó

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y &= \bar{c}^T \bar{x} \end{aligned}$$

egyenletekben szereplő $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$ mátrixokat!

Az állapottér reprezentációk közötti kapcsolat (levezetés az 5. EA-ban):

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{b} = Tb, \quad \bar{c}^T = c^T T^{-1}.$$

Az A és $\bar{A}$ mátrixok közötti fenti kapcsolatot **hasonlósági transzformációnak** nevezzük.

Tekintsük az alábbi átviteli függvényt:

$$G = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Írjuk fel az állapottér reprezentációt irányíthatósági alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix alakja:

$$T_c = (\mathcal{C}\mathcal{T})^{-1}$$

ahol

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

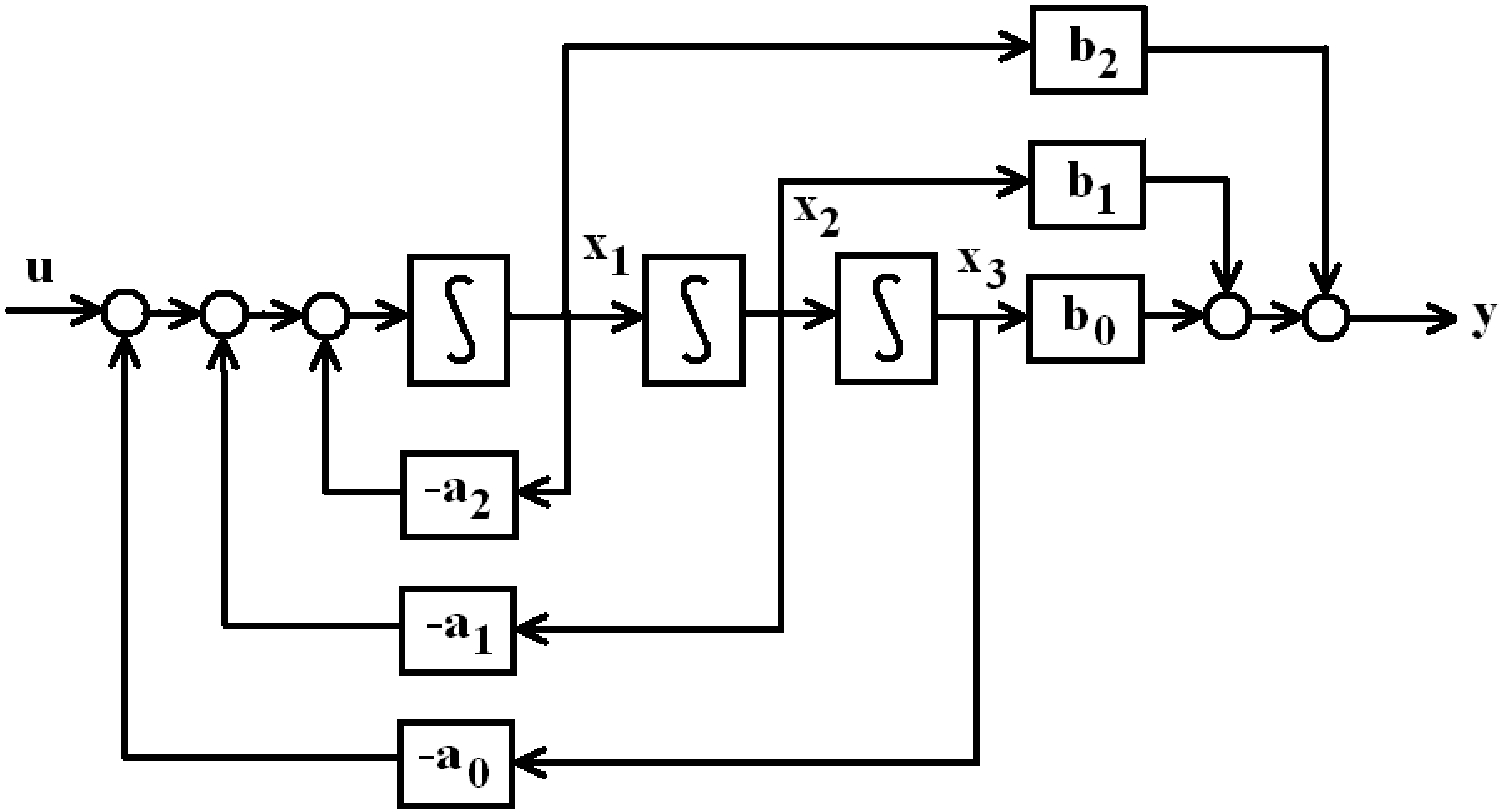
$$\det(sI - A) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

A transzformációs mátrix elemei n dimenziós esetben:

$$\mathcal{C} = \left[b \ Ab \ A^2 b \ \ldots \ A^{n-1} b \right]$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \ldots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & a_{n-1} \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az irányíthatósági alak illusztrációja:



Írjuk fel az állapottér reprezentációt diagonális alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix alakja:

$$T_d = (\mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{P})^{-1}$$

ahol

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix elemei n dimenziós esetben:

$$\mathcal{C} = \left[b \ Ab \ A^2 b \ \dots \ A^{n-1} b \right]$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & a_{n-1} \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

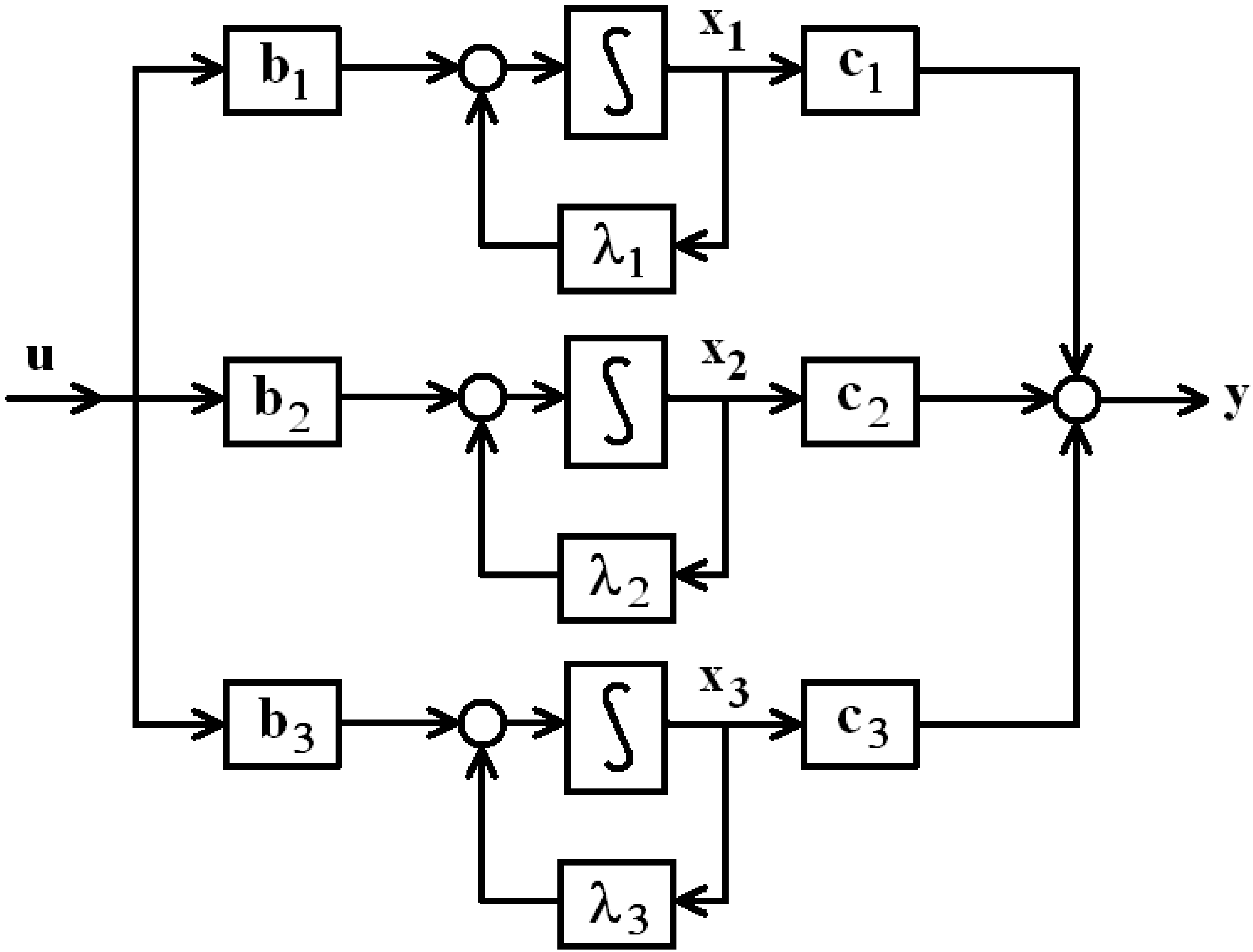
$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A diagonális alak illusztrációja a következő oldalon.

Mindig igaz, hogy:

$$r_1 = b_1 \cdot c_1, \quad r_2 = b_2 \cdot c_2, \quad \dots \quad r_n = b_n \cdot c_n$$

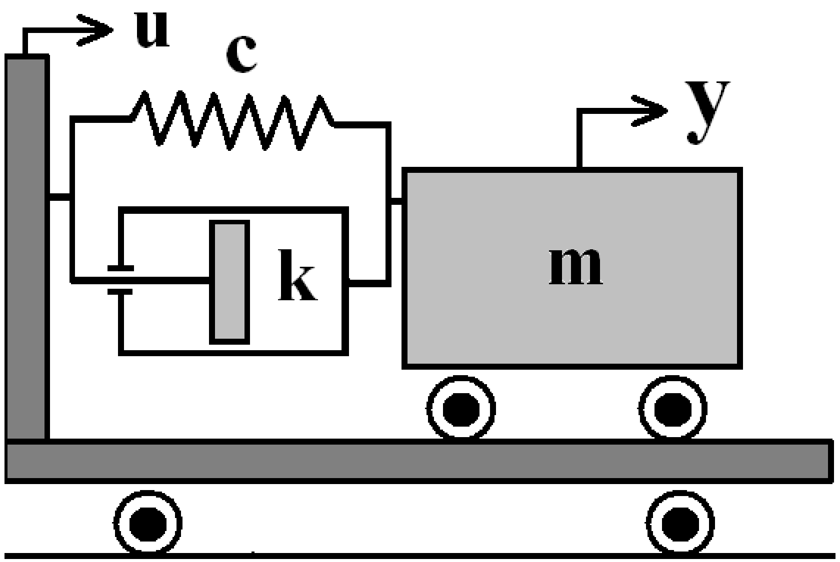
$$r_i = b_i \cdot c_i \quad \forall i = 1 \dots n$$


b1
b2
b3
x1
x2
x3
c1
c2
c3
λ1
λ2
λ3
u
y

Bevezetés az állapottér elméletbe: Állapottér reprezentációk vizsgálata

1. Példa az állapottér reprezentációk megválasztására
2. Átviteli függvény és állapottér reprezentációk közötti kapcsolatok
3. Irányíthatósági és diagonális alakok előállítása hasonlósági transzformációval
4. **Demonstrációs példa**

Mechanikai példa



Dinamikus diff.egyenlet

$$m\ddot{y} = k\left(\dot{u} - \dot{y}\right) + c\left(u - y\right)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}\dot{y} - \frac{c}{m}y + \frac{k}{m}\dot{u} + \frac{c}{m}u$$

$m = 1kg$ a kocsi tömege,
$k = 8\frac{Ns}{m}$ a csillapítási tényező,
$c = 7\frac{N}{m}$ a rugóállandó.
Behelyettesítve:

$$\ddot{y} = -8\dot{y} - 7y + 8\dot{u} + 7u$$

Átviteli függvény:

$$Y(s) = \frac{8s+7}{s^2+8s+7}U(s)$$

Irányíthatósági alak felírása segédváltozós módszerrel. Vezessük be $\xi(s)$ változót a következőképpen:

$$\xi(s) = \tfrac{1}{s^2+8s+7}U(s)$$
$$Y(s) = (8s+7)\,\xi(s)$$

Inverz Laplace transzformációval:

$$\ddot{\xi}(t) = -8\dot{\xi}(t) - 7\xi(t) + u(t)$$
$$y(t) = 8\dot{\xi}(t) + 7\xi(t)$$

Vezessük be az állapotváltozókat a következőképpen:

$$x_1 = \dot{\xi}(t)$$
$$x_2 = \xi(t)$$

Az állapotegyenleteket felírva:

$$\dot{x}_1 = \ddot{\xi} = -8\dot{\xi} - 7\xi + u = -8x_1 - 7x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = \dot{\xi} = x_1$$
$$y = 8\dot{\xi} + 7\xi = 8x_1 + 7x_2$$

Az állapottér reprezentáció irányíthatósági alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Átviteli függvény:

$$Y = \frac{8s+7}{s^2+8s+7}U$$

Diagonális alak felírása résztörtekre bontással:

Pólusok: -1 és -7. Az átviteli függvény:

$$Y = \left(\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+7}\right)U = \frac{(A+B)\,s+7A+B}{(s+1)\,(s+7)}$$

azaz

$$A+B=8, \quad 7A+B=7$$

aminek megoldása:

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{49}{6}$$

Az átviteli függvény:

$$Y = \left(\frac{-\frac{1}{6}}{s+1} + \frac{\frac{49}{6}}{s+7} \right) U$$

A résztörtek átviteli függvényei

$$Y_1 = \frac{-\frac{1}{6}}{s+1} U, \quad Y_2 = \frac{\frac{49}{6}}{s+7} U$$

Az állapotváltozók:

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$

Az állapotegyenletek:

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = -y_1 - \frac{1}{6}u = -x_1 - \frac{1}{6}u$$
$$\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = -7y_2 + \frac{49}{6}u = -7x_2 + \frac{49}{6}u$$

Az állapottér reprezentáció diagonális alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{49}{6} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A lineáris algebrai összefüggéseket használva alakítsuk a diagonális állapottér reprezentációt irányíthatósági alakúvá!

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{49}{6} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix összefüggése:

$$T_c = (\mathcal{C}\mathcal{T})^{-1}$$

ahol

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 49 & -343 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$|sI - A| = s^2 + 8s + 7$$

$$T_c = (\mathcal{C}\mathcal{T})^{-1} = \left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 49 & -343 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = 6\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 49 & 49 \end{bmatrix}^{-1}$$

Az irányíthatósági alak:

$$A_c = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_c^T = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A lineáris algebrai összefüggéseket használva alakítsuk az irányíthatósági állapottér reprezentációt diagonális alakúvá:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix összefüggése:

$$T_d = (\mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{P})^{-1}$$

ahol

$$\mathcal{C} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 49 & -343 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_d = (\mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{P})^{-1} = \left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 49 & -343 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= 6\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -294 \end{bmatrix}^{-1}$$

A diagonális alak:

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} b_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} \end{bmatrix} c_d^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -49 \end{bmatrix}$$