Állapottér reprezentációk tulajdonságai

- stabilitás
- irányíthatóság
- megfigyelhetőség
- minimalitás

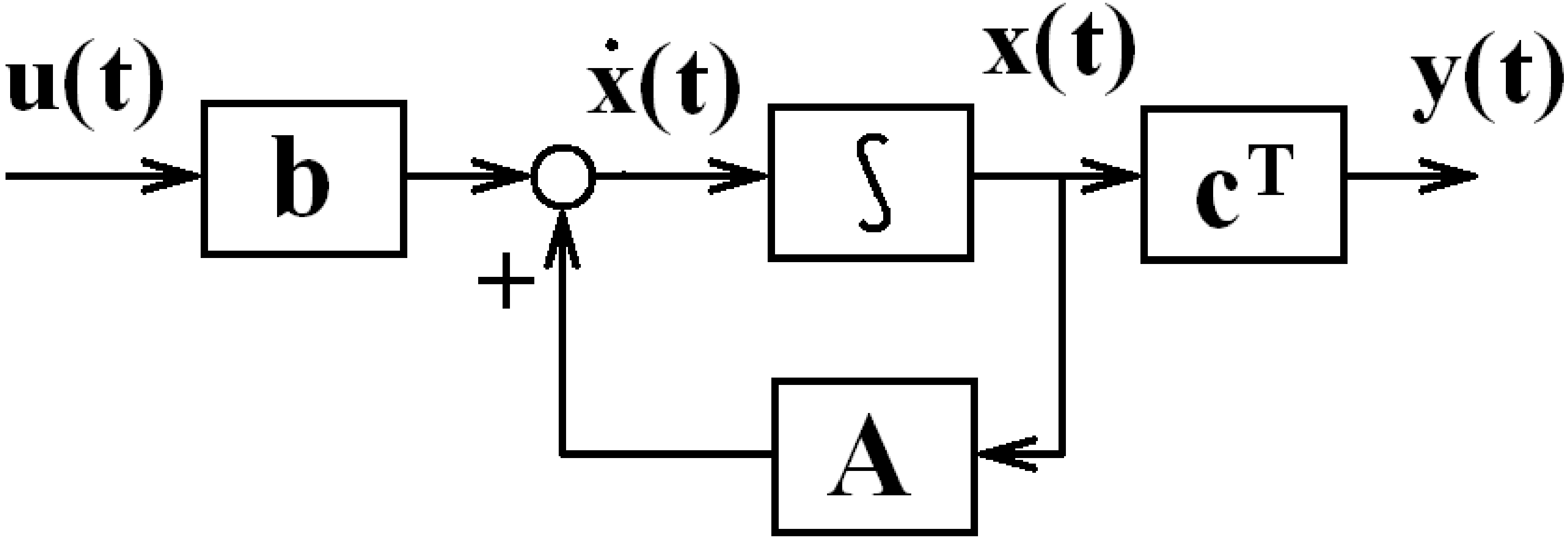
Általánosan egy lineáris, SISO dinamikus rendszer állapotdinamikai és megfigyelési egyenleteit a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x, \end{aligned}$$

Egy adott állapottér reprezentációt az (A, b, c^T) hármas fejez ki.

Egy (A, b, c^T) **állapottér reprezentáció dimenziójának** az állapottér dimenzióját nevezzük: $n = \dim\{x(t)\}$.

Az állapottérben adott rendszer blokkdiagramja:



Az állapottér reprezentáció alapján a rendszer átviteli függvényét a LAPLACE-transzformáció alkalmazásával kapjuk meg:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bU(s),$$

ebből

$$(sI - A)X(s) = bU(s) + x(0).$$

Az állapot LAPLACE-transzformáltja:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} bU(s) + (sI - A)^{-1} x(0),$$

ahol $x(0)$ a kezdő állapot $t = 0$ időpontban. Az $x(0) = 0$ feltétel mellett

$$Y(s) = c^T X(s) = c^T (sI - A)^{-1} bU(s)$$

A $G(s)$ átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b.$$

Összehasonlítva a $G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}$ jelöléssel látható, hogy

$b(s)=c^T \mathrm{adj}(sI\text{-}A)b$ $(n\text{-}1)$-edfokú polinom, ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$a(s)=\det(sI\text{-}A)$ n-edfokú polinom, ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Az átviteli függvény pólusai tehát az

$a(s)=\det(sI\text{-}A)=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei.

1. Példa: Diagonál reprezentációknál, ha $n = 2$ akkor az A_d mátrix

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

alakú, amiből

$$\det(sI - A_d) = \begin{vmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{vmatrix} = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = 0,$$

tehát a rendszer pólusai λ_1 és λ_2.

2. Példa: Határozzuk meg az alábbi állapotegyenlet alapján a pólusokat!

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\det(sI - A_c) = \begin{vmatrix} s + a_1 & a_0 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$$

ami épp a $G(s)$ átviteli függvény nevező polinomja. Ennek gyökei, tehát a rendszer pólusai λ_1 és λ_2.

1. Megjegyzés: *Ha adott egy* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix, akkor a* $\det(sI\text{-}A)=0$ *egyenlet gyökei az A mátrix sajátértékei. A stabilitáselméletből tanultak alapján a rendszer stabilis, ha pólusai a baloldali komplex félsíkon helyezkednek el.*

Ebből az állapottér reprezentációk stabilitására a következőt kapjuk:

1. Állítás (Állapottér reprezentációk stabilitása):
Az (A, b, c^T) reprezentáció stabilis, ha az A mátrix sajátértékei a baloldali komplex félsíkon találhatók.

Egy állapottér reprezentációt az (A, b, c^T) mátrix hármassal jellemeztünk, ahol ha a rendszernek egy bemenő- és egy kimenőjele van, akkor a b és c^T n-dimenziós vektorok, A pedig $n \times n$ méretű mátrix, ahol n az állapottér dimenzióját jelöli.

Tegyük fel, hogy ismerjük a rendszer $x(t)$ állapotát a $t = t_0$ időpontban. Ekkor a rendszer viselkedésével kapcsolatban a következő két kérdést vethetjük fel:

1. *Állapot megfigyelhetőség*: Adott (A, b, c^T). Mi a feltétele annak, hogy az $x(t)$ állapotokat minden a $t \geq t_0$ időpontra meghatározhassuk a rendszer jövőbeli bemeneti ($u(t)$) és kimeneti ($y(t)$) függvényeinek ismeretében?

2. *Állapot irányíthatóság*: Adott (A, b, c^T), és $x(t)$ a $t = t_0 = 0$ időpontban. Mi a feltétele annak, hogy találjunk olyan $u(t)$, $t \geq t_0$ irányítást, amely a rendszert véges T idő alatt az $x(0)$ állapotból egy tetszőleges $x(T)$, $x(T) \neq x(0)$ állapotba viszi?

Az állapot megfigyelhetőség vizsgálatához induljunk ki az állapot egyenletekből és képezzük az állapot-vektor valamint a kimenet magasabb rendű derivált-jait!

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + bu \\
y &= c^T x \\
\dot{y} &= c^T \dot{x} = c^T (Ax + bu) = c^T Ax + c^T bu \\
\ddot{y} &= c^T \ddot{x} = c^T A(Ax + bu) + c^T b\dot{u} = \\
&= c^T A^2 x + c^T Abu + c^T b\dot{u} \\
&\vdots \\
y^{(n-1)} &= c^T x^{(n-1)} = \\
&= c^T A^{n-1} x + c^T A^{n-2} bu + c^T A^{n-3} b\dot{u} + \ldots + c^T bu^{(n-2)}
\end{aligned}$$

Mátrixos jelölésekkel:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c^T b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c^T A^{(n-2)} b & \cdots & c^T b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} \end{bmatrix}$$

$$y_n(t) = O_n(c^T, A) x(t) + T_n u_n(t).$$

Amennyiben $y(t)$, $u(t)$ ismert $t \geq t_0$ időpontban, akkor az $y_n(t), u_n(t)$ vektorokat is ismerjük. Az $O_n(c^T, A)$, T_n mátrixokat az ismert (A, b, c^T) mátrixokból képezhetjük.

A kérdés tehát az $x(t)$ állapotvektor meghatározása minden $t \geq t_0$ időpontra.

Legyen $t_0 \leq 0$, ekkor az $u(t)$ gerjesztőjel (és deriváltjai) zérusok, így $u_n(0) = 0$. Ekkor a fenti egyenlet

$$y_n(0) = O_n(c^T, A)x(0)$$

alakra egyszerűsödik.

Mivel $O_n(c^T, A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, az $y_n(0)$ ismeretében az $x(0)$ állapot egyértelműen meghatározható, ha az $O_n(c^T, A)$ teljes rangú, vagyis ha $rang\left\{ O_n(c^T, A) \right\} = n$, tehát ha az $O_n(c^T, A)$ mátrix rangja megegyezik az állapottér dimenziójával.

Ha egy tetszőleges $t_0 \geq 0$ esetén $y_n(t_0) \neq 0$, akkor

$$O_n(c^T, A)x(t_0) = y_n(t_0) - T_n u_n(t_0).$$

Az egyenlet jobboldala tetszőleges vektor, így $x(t_0)$-ra csak akkor van egyértelmű megoldás, ha az $O_n(c^T, A)$ mátrix teljes oszloprangú, azaz a képtere a teljes n-dimenziós állapottér.

Láttuk, hogy a fenti állapotmegfigyelhetőségi feltételek az $x(t), t \geq t_0$ meghatározására csak a (c^T, A) pártól függnek a belőlük képzett $O_n(c^T, A)$ mátrix rangján keresztül.

1. Definíció. *Az* $O_n(c^T, A)$ *mátrixot a rendszer megfigyelhetőségi mátrixának nevezzük.*

2. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel): *Egy* (c^T, A) *pár megfigyelhető akkor és csak akkor, ha megfigyelhetőségi mátrixuk rangja megegyezik az állapottér dimenziójával, azaz*

$$\operatorname{rang}\left\{ O_n(c^T, A) \right\} = n.$$

3. Példa: *Vizsgáljuk az alábbi diagonális állapottér reprezentáció megfigyelhetőségét!*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} u, \quad \dim x = 2$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

A megfigyelhetőségi mátrix:

$$O_2(c^T, A) = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

A rangfeltételt a következőképp vizsgálhatjuk:
rang $\left\{ O_2(c^T, A) \right\} = 2$ *akkor, ha* $\det\{O_2(c^T, A) \neq 0.$

Mivel $\det\left\{ O_2(c^T, A) \right\} = \lambda_2 - \lambda_1,$ *a rendszer állapot megfigyelhető akkor és csak akkor, ha* $\lambda_2 \neq \lambda_1.$

Az állapot megfigyelhetőséggel analóg módon, konstruktívan bizonyíthatjuk, hogy egy (A, b, c^T) rendszer állapot irányítható, azaz állapota egy tetszőleges $x(0)$ kezdeti állapotból egy másik, $x(T) \neq x(0)$ állapotba vihető véges T idő alatt, ha az ún. irányíthatósági mátrix

$$\mathcal{C}_n(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \ldots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

teljes rangú, ahol n az állapottér reprezentáció dimenziója.

3. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel): *Egy* (A, b, c^T) *állapottér reprezentáció irányítható akkor és csak akkor, ha*

$$\text{rang}\left\{\mathcal{C}_n(A, b)\right\} = n.$$

4. Állítás (Minimál reprezentáció):
Egy rendszer $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$ *állapottér reprezentációja minimál reprezentáció, ha együttesen irányítható és megfigyelhető, azaz*

$$rang\left\{\mathcal{C}_n\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)\right\} = rang\left\{\mathcal{O}_n\left(\tilde{c}^T, \tilde{A}\right)\right\} = n.$$

A minimál reprezentációkhoz tartozó állapotér dimenziója a legkisebb az összes olyan (A, b, c^T) állapottér reprezentációkat tekintve, amelyekre

$$c^T(sI - A)^{-1}b = \tilde{c}^T \left(sI - \tilde{A}\right) \tilde{b} = \frac{b(s)}{a(s)},$$

ahol $b(s)/a(s)$ a rendszer átviteli függvénye.

4. Példa: *Vizsgáljuk meg a diagonális állapottér reprezentáció irányíthatóságát az $n = 2$ esetre! Az irányíthatósági mátrix az alábbi lesz:*

$$\mathcal{C}_2(A_d, b_d) = \begin{bmatrix} r_1 & \lambda_1 r_1 \\ r_2 & \lambda_2 r_2 \end{bmatrix}.$$

A fenti irányíthatósági mátrix rangja éppen 2 ha nem-szinguláris, azaz

$$\det\{\mathcal{C}_2(A_d, b_d)\} = r_1 r_2 \lambda_2 - r_1 r_2 \lambda_1 = r_1 r_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

azaz

$$rang\{\mathcal{C}_2(A_d, b_d)\} = 2 \iff r_1 \neq 0, r_2 \neq 0 \text{ és } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

5. Példa: *Vizsgáljuk meg az irányítható állapottér reprezentáció irányíthatóságát!*

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Az irányíthatósági mátrix:

$$\mathcal{C}_2(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így ez a reprezentáció mindig irányítható, azonban adódhat olyan eset, hogy nem megfigyelhető.

2. Megjegyzés: *Általánosan igaz, hogy minden irányítható* (A, b, c^T) *állapottér reprezentáció az* (A_c, b_c, c_c^T) *alakra hozható hasonlósági transzformációval.*