

Állapottér reprezentációk tulajdonságai

- stabilitás
- irányíthatóság
- megfigyelhetőség
- minimalitás

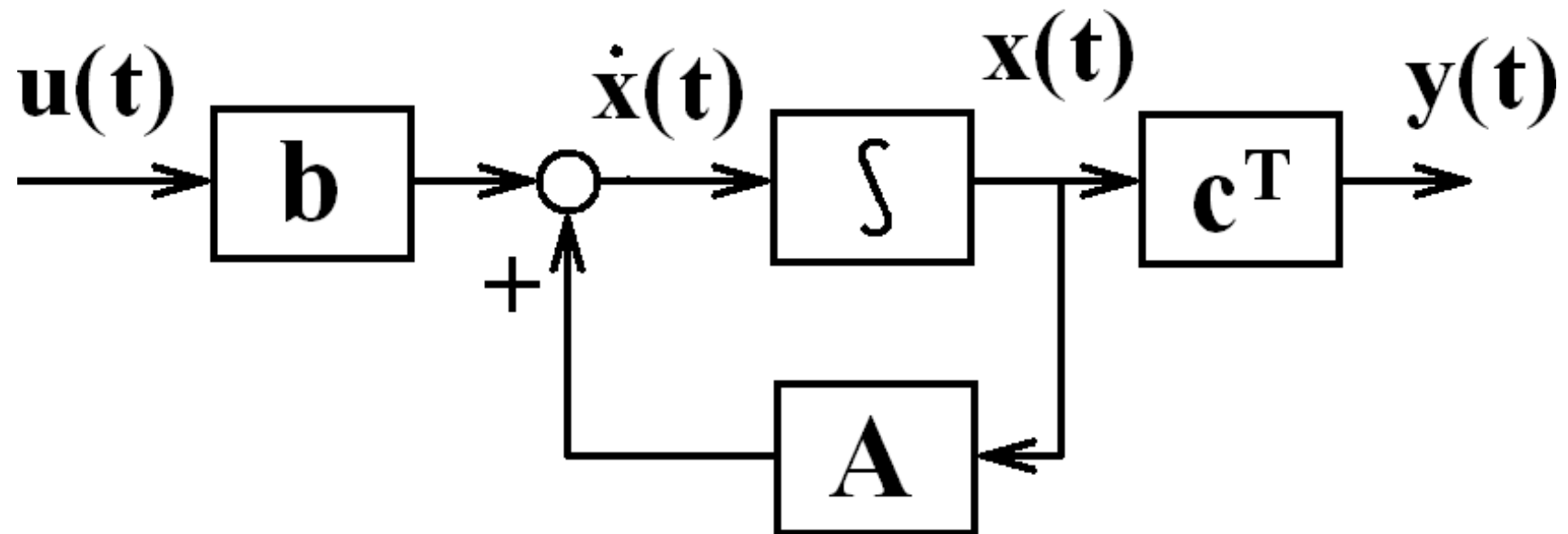
Általánosan egy lineáris, SISO dinamikus rendszer állapotdinamikai és megfigyelési egyenleteit a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x,\end{aligned}$$

Egy adott állapotter reprezentációt az (A, b, c^T) hármas fejez ki.

Egy (A, b, c^T) **állapottér reprezentáció dimenziójának** az állapotter dimenzióját nevezzük: $n = \dim\{x(t)\}$.

Az állapotér reprezentáció blokkdiagramja:



Az állapottér reprezentáció alapján a rendszer átviteli függvényét a LAPLACE-transzformáció alkalmazásával kapjuk meg:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bU(s),$$

ebből

$$(sI - A)X(s) = bU(s) + x(0).$$

Az állapot LAPLACE-transzformáltja:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}bU(s) + (sI - A)^{-1}x(0),$$

ahol $x(0)$ a kezdő állapot $t = 0$ időpontban. Az $x(0) = 0$ feltétel mellett

$$Y(s) = c^T X(s) = c^T (sI - A)^{-1}bU(s)$$

A $G(s)$ átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c^T (sI - A)^{-1}b.$$

Összehasonlítva a $G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}$ jelöléssel látható, hogy

$b(s)=c^T \text{adj}(sI-A)b$ $(n-1)$ -edfokú polinom, ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$a(s)=\det(sI-A)$ n -edfokú polinom, ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Az átviteli függvény pólusai tehát az

$a(s)=\det(sI-A)=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei.

1. Példa: Diagonál reprezentációknál, ha $n = 2$ akkor az A_d mátrix

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

alakú, amiből

$$\det(sI - A_d) = \begin{vmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{vmatrix} = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = 0,$$

tehát a rendszer pólusai λ_1 és λ_2 .

2. Példa: Határozzuk meg az alábbi állapotegyenlet alapján a pólusokat!

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\det(sI - A_c) = \begin{vmatrix} s + a_1 & a_0 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + a_1s + a_0 = 0,$$

ami épp a $G(s)$ átviteli függvény nevező polinomja. Ennek gyökei, tehát a rendszer pólusai λ_1 és λ_2 .

1. Megjegyzés: *Ha adott egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, akkor a $\det(sI-A)=0$ egyenlet gyökei az A mátrix sajátértékei. A stabilitáselméletből tanultak alapján a rendszer stabilis, ha pólusai a baloldali komplex félsíkon helyezkednek el.*

Ebből az állapottér reprezentációk stabilitására a következőt kapjuk:

1. Állítás (Állapottér reprezentációk stabilitása):

Az (A, b, c^T) reprezentáció stabilis, ha az A mátrix sajátértékei a baloldali komplex félsíkon találhatóak.

Egy állapotter reprezentációt az (A, b, c^T) mátrix hármassal jellemeztünk, ahol h a rendszernek egy bemenő- és egy kimenőjele van, akkor a b és c^T n -dimenziós vektorok, A pedig $n \times n$ méretű mátrix, ahol n az állapotter dimenzióját jelöli.

Tegyük fel, hogy ismerjük a rendszer $x(t)$ állapotát a $t = t_0$ időpontban. Ekkor a rendszer viselkedésével kapcsolatban a következő két kérdést vethetjük fel:

1. *Állapot megfigyelhetőség*: Adott (A, b, c^T) . Mi a feltétele annak, hogy az $x(t)$ állapotokat minden a $t \geq t_0$ időpontra meghatározhassuk a rendszer jövőbeli bemeneti ($u(t)$) és kimeneti ($y(t)$) függvényeinek ismeretében?

2. *Állapot irányíthatóság*: Adott (A, b, c^T) , és $x(t)$ a $t = t_0 = 0$ időpontban. Mi a feltétele annak, hogy találjunk olyan $u(t)$, $t \geq t_0$ irányítást, amely a rendszert véges T idő alatt az $x(0)$ állapotból egy tetszőleges $x(T)$, $x(T) \neq x(0)$ állapotba viszi?

Az állapot megfigyelhetőség vizsgálatához induljunk ki az állapot egyenletekből és képezzük az állapotvektor valamint a kimenet magasabb rendű deriváltjait!

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = c^T x$$

$$\dot{y} = c^T \dot{x} = c^T (Ax + bu) = c^T Ax + c^T bu$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= c^T \ddot{x} = c^T A(Ax + bu) + c^T b\dot{u} = \\ &= c^T A^2 x + c^T Abu + c^T b\dot{u} \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= c^T x^{(n-1)} = \\ &= c^T A^{n-1} x + c^T A^{n-2} bu + c^T A^{n-3} b\dot{u} + \dots + c^T bu^{(n-2)} \end{aligned}$$

Mátrixos jelölésekkel:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c^T b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ c^T A^{(n-2)} b & \dots & c^T b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} \end{bmatrix}$$

$$y_n(t) = O_n(c^T, A)x(t) + T_n u_n(t).$$

Amennyiben $y(t)$, $u(t)$ ismert $t \geq t_0$ időpontban, akkor az $y_n(t)$, $u_n(t)$ vektorokat is ismerjük. Az $O_n(c^T, A)$, T_n mátrixokat az ismert (A, b, c^T) mátrixokból képezhetjük.

A kérdés tehát az $x(t)$ állapotvektor meghatározása minden $t \geq t_0$ időpontra.

Legyen $t_0 \leq 0$, ekkor az $u(t)$ gerjesztőjel (és deriváltjai) zérusok, így $u_n(0) = 0$. Ekkor a fenti egyenlet

$$y_n(0) = O_n(c^T, A)x(0)$$

alakra egyszerűsödik.

Mivel $O_n(c^T, A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, az $y_n(0)$ ismeretében az $x(0)$ állapot egyértelműen meghatározható, ha az $O_n(c^T, A)$ teljes rangú, vagyis ha $\text{rang}\{O_n(c^T, A)\} = n$, tehát ha az $O_n(c^T, A)$ mátrix rangja megegyezik az állapottér dimenziójával.

Ha egy tetszőleges $t_0 \geq 0$ esetén $y_n(t_0) \neq 0$, akkor

$$O_n(c^T, A)x(t_0) = y_n(t_0) - T_n u_n(t_0).$$

Az egyenlet jobboldala tetszőleges vektor, így $x(t_0)$ -ra csak akkor van egyértelmű megoldás, ha az $O_n(c^T, A)$ mátrix teljes oszloprangú, azaz a képtere a teljes n -dimenziós állapottér.

Láttuk, hogy a fenti állapotmegfigyelhetőségi feltételek az $x(t)$, $t \geq t_0$ meghatározására csak a (c^T, A) pártól függenek a belőlük képzett $O_n(c^T, A)$ mátrix rangján keresztül.

1. Definíció. Az $O_n(c^T, A)$ mátrixot a rendszer megfigyelhetőségi mátrixának nevezzük.

2. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel): Egy (c^T, A) pár megfigyelhető akkor és csak akkor, ha megfigyelhetőségi mátrixuk rangja megegyezik az állapottér dimenziójával, azaz

$$\text{rang} \{ O_n(c^T, A) \} = n.$$

3. Példa: *Vizsgáljuk az alábbi diagonális állapotter reprezentáció megfigyelhetőségét!*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} u, \quad \dim x = 2$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

A megfigyelhetőségi mátrix:

$$O_2(c^T, A) = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

A rangfeltételt a következőképp vizsgálhatjuk:

$\text{rang} \{ O_2(c^T, A) \} = 2$ akkor, ha $\det\{ O_2(c^T, A) \} \neq 0$.

Mivel $\det \{ O_2(c^T, A) \} = \lambda_2 - \lambda_1$, a rendszer állapot megfigyelhető akkor és csak akkor, ha $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

Az állapot megfigyelhetőséggel analóg módon, konstruktívan bizonyíthatjuk, hogy egy (A, b, c^T) rendszer állapot irányítható, azaz állapota egy tetszőleges $x(0)$ kezdeti állapotból egy másik, $x(T) \neq x(0)$ állapotba vihető véges T idő alatt, ha az ún. irányíthatósági mátrix

$$C_n(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

teljes rangú, ahol n az állapottér reprezentáció dimenziója.

3. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel): *Egy (A, b, c^T) állapottér reprezentáció irányítható akkor és csak akkor, ha*

$$\text{rang} \{ C_n(A, b) \} = n.$$

4. Állítás (Minimál reprezentáció):

Egy rendszer $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$ állapotter reprezentációja minimál reprezentáció, ha együttesen irányítható és megfigyelhető, azaz

$$\text{rang} \{ C_n (\tilde{A}, \tilde{b}) \} = \text{rang} \{ O_n (\tilde{c}^T, \tilde{A}) \} = n.$$

A minimál reprezentációkhoz tartozó állapotér dimenziója a legkisebb az összes olyan (A, b, c^T) állapotér reprezentációkat tekintve, amelyekre

$$c^T (sI - A)^{-1} b = \tilde{c}^T (sI - \tilde{A}) \tilde{b} = \frac{b(s)}{a(s)},$$

ahol $b(s)/a(s)$ a rendszer átviteli függvénye.

4. Példa: *Vizsgáljuk meg a diagonális állapotter reprezentáció irányíthatóságát az $n = 2$ esetre! Az irányíthatósági mátrix az alábbi lesz:*

$$C_2(A_d, b_d) = \begin{bmatrix} r_1 & \lambda_1 r_1 \\ r_2 & \lambda_2 r_2 \end{bmatrix}.$$

A fenti irányíthatósági mátrix rangja éppen 2 ha nonszinguláris, azaz

$$\det \{ C_2(A_d, b_d) \} = r_1 r_2 \lambda_2 - r_1 r_2 \lambda_1 = r_1 r_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

azaz

$$\text{rang} \{ C_2(A_d, b_d) \} = 2 \iff r_1 \neq 0, r_2 \neq 0 \text{ és } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

5. Példa: *Vizsgáljuk meg az irányítható állapottér reprezentáció irányíthatóságát!*

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Az irányíthatósági mátrix:

$$C_2(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így ez a reprezentáció mindig irányítható, azonban adódhat olyan eset, hogy nem megfigyelhető.

2. Megjegyzés: *Általánosan igaz, hogy minden irányítható (A, b, c^T) állapottér reprezentáció az (A_c, b_c, c_c^T) alakra hozható hasonlósági transzformációval.*