Bevezetés az állapottér-elméletbe

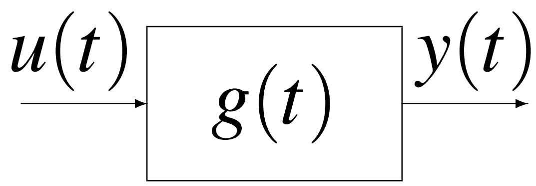
- Dinamikus rendszerek állapottér reprezentációi
- Irányítható alak
- Megfigyelhetőségi alak
- Diagonális alak
- Állapottér transzformáció

A szabályozáselmélet klasszikus, BODE, NICHOLS, NYQUIST nevéhez kötődő, dominánsan frekvencia-tartománybeli analízis és szintézis (tervezési) módszerei az 1960-as évektől kezdődően kiegészültek új, főleg időtartománybeli rendszer- és irányításelméleti módszerekkel.

Ezeket az ún. „modern” irányzatokat a *rendszer állapot* és az *állapottér* bevezetése jellemezte, így a hozzájuk illeszkedő tervezési módszereket állapottér módszereknek nevezzük. A „modern” kor egyik legjelesebb képviselője a magyar származású RUDOLF E. KALMAN, akinek 1961 és 1965 között megjelent cikkei számos alapvető koncepció letételét és probléma megoldását jelentették.

A súlyfüggvény segítségével a bemenő- és kimenő-jelek kapcsolata a következőképp adható meg (zérus kezdeti feltétel esetén)

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$



Az átviteli függvény definíciója a LAPLACE-transzformáltak segítségével

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

ahol $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, tehát $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.

1. Definíció (Állapot). *A rendszer állapota egy t_0 időpontban az az információ (olyan jelek ismerete), amelyből az $u(t)$, $t \geq t_0$ bemenőjel ismeretében a rendszer válasza minden $t \geq t_0$ időpontra meghatározható.*

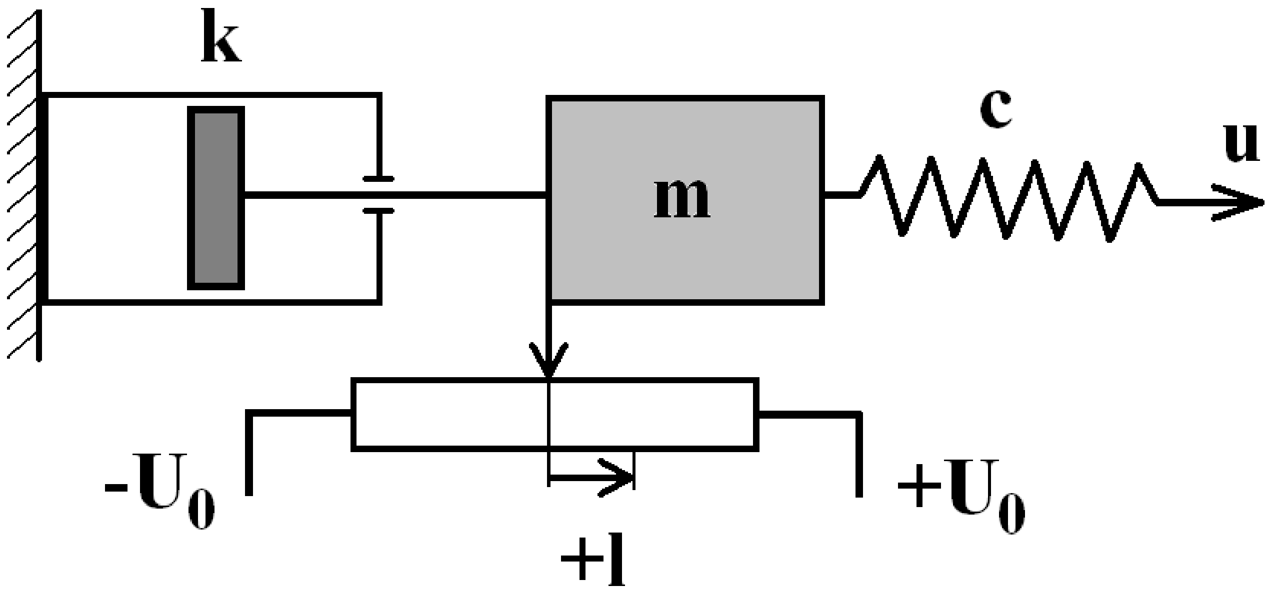
A **rendszer válasza** itt a jövőbeli, $t \geq t_0$ időpontra vonatkozó *állapotokat* és a *kimenőjeleket* jelenti.

A rendszer állapotait leíró jeleket, illetve ezek függvényeit, a rendszer **állapotváltozóinak** nevezzük.

Az állapotváltozók elektromechanikai rendszerekben tipikusan az elmozdulás, sebesség, szögelfordulás, szögsebesség, feszültség, áram vagy az ezekből (lineáris kombinációval, differenciálással, integrálással) képzett jelek lehetnek.

Az állapot meghatározását a differenciálegyenlet, majd az átviteli függvény ismeretéből kiindulva a következő példákon keresztül mutatjuk be.

1. Példa: Tekintsük az alábbi rezgő tömegpont dinamikáját. Az m tömeget a c rugómerevségű rugón keresztül gerjesztjük, elmozdulását egy potenciométerrel mérjük.



Ekkor a rendszer differenciálegyenlete

$$m\ddot{\ell}+k\dot{\ell}=c(u-\ell),$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\ddot{\ell}+\frac{k}{m}\dot{\ell}+\frac{c}{m}\ell=\frac{c}{m}u.$$

A mérési vagy megfigyelési egyenlet a feszültségosztó összefüggése alapján

$$y = \frac{U_0}{\ell_0}\ell.$$

Legyenek az állapotváltozók a tömegpont elmozdulása és sebessége (ezeket a mechanikában szokásos fázisváltozóknak nevezni), azaz

$$x_1 = \ell, \quad x_2 = \dot{\ell}.$$

Ekkor $\ddot{\ell} = \dot{x}_2$ és $\dot{x}_1 = x_2$, ezeket a dinamikát leíró differenciálegyenletbe és a megfigyelési egyenletbe helyettesítve kapjuk

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{c}{m}u,$$

$$y = \frac{U_0}{\ell_0}x_1.$$

Mátrixos jelölésekkel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

amiből a következő állapot egyenleteket kapjuk:

$$\dot{x}_f = A_f x_f + b_f u$$

$$y = c_f^T x_f$$

ahol

$$a_1 = \frac{c}{m}, \quad a_0 = \frac{k}{m}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{c}{m}$$

$$c_1 = \frac{U_0}{\ell_0}, \quad c_2 = 0.$$

Tekintettel arra, hogy az x_f állapotvetor az ún. fázissík eleme, a fenti speciális alakú állapottér alakot fázisváltozós alaknak nevezzük, jelölésére pedig az f indexet használhatjuk.

2. Példa: Tegyük fel, hogy adott egy rendszer átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

A bemenőjel LAPLACE-transzformáltja $U(s)$ és a kimenőjel LAPLACE-transzformáltja $Y(s)$ közötti kapcsolatot ekkor a következőképp írhatjuk:

$$Y(s) = b(s)a^{-1}(s)U(s).$$

Vezessük be a $\xi(s)$ változót az alábbi módon:

$$\xi(s) = a^{-1}(s)U(s).$$

Ekkor a kimenő, ill. a bemenő jel LAPLACE-transzformáltja:

$$Y(s) = b(s)\xi(s), \quad U(s) = a(s)\xi(s),$$

vagyis esetünkben:

$$Y(s) = [b_1 s + b_0]\,\xi(s) \quad \text{és}$$

$$U(s) = \left[s^2 + a_1 s + a_0\right]\xi(s).$$

Időtartományban a $\xi(t)$ változó, az $y(t)$ kimenő- és az $u(t)$ bemenőjel kapcsolatát leíró differenciálegyenletek:

$$y(t) = b_1\dot{\xi}(t) + b_0\xi(t)$$
$$u(t) = \ddot{\xi}(t) + a_1\dot{\xi}(t) + a_0\xi(t)$$

Vezessük be a következő új változókat, amelyeket állapotváltozóknak nevezünk:

$$x_1 = \dot{\xi}, \quad x_2 = \xi.$$

Figyelembe véve, hogy $\dot{x}_1 = \ddot{\xi}$ és $\dot{x}_2 = \dot{\xi} = x_1$, az alábbi elsőrendű differenciálegyenletekhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 - a_0 x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}\right\} \textbf{állapotdinamika egyenletrendszere.}$$

Az állapotváltozókból a rendszer kimenőjele a következőképp kapható meg:

$$y = b_1 x_1 + b_0 x_2 \quad \textbf{megfigyelési egyenlet.}$$

Mátrixos jelölésekkel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

amiből a következő állapotegyenleteket kapjuk:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + b_c u$$
$$y = c_c^T x_c$$

ahol

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_c^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix}.$$

Az állapotegyenletben szereplő mátrixok speciális struktúrája miatt ezt az állapottér reprezentációt **irányítható alaknak** nevezzük.

Irányítható alak: Ha egy rendszer átviteli függvénye $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ alakú, ahol

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \quad \text{és}$$
$$b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0,$$

akkor az (A_c, b_c, c_c^T) állapottér reprezentációban az A_c mátrix legelső sorát az $a(s)$ polinom együtthatóiból (negatív előjellel véve!), a c_c^T vektort pedig a $b(s)$ polinom együtthatóiból képezzük.

Az A_c mátrix speciális struktúrájából következően egyszerűen megmutatható, hogy

$a(s) = \det(sI - A_c)$, ahol I az n dimenziós egységmátrix.

1. Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az átviteli függvény nevezőjének fokszáma megegyezik az $x(t)$ állapotvektor dimenziójával, azaz $\deg\{a(s)\} = \dim\{x(t)\}$! A példában a $\dim\{x(t)\} = 2$, amit az állapottér reprezentáció dimenziójának nevezünk és erre a $\dim\{x(t)\} = n$ jelölést használjuk.

2. Megjegyzés: Ha

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

alakú, akkor le kell osztani a $G(s)$ átviteli függvény számlálóját és nevezőjét is a_n-nel, hogy a szükséges $a_n = 1$ alakhoz (főegyütthatós) jussunk.

A főegyütthatós $a(s)$ polinom tehát:

$$a(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

A megfigyelhetőségi alak közvetlenül képezhető az irányíthatósági alakból az alábbiak szerint:

$$A_o = {A_c}^T, \quad b_o = \left(c_c^T\right)^T, \quad c_o^T = b_c^T$$

Így az előző kétdimenziós esetre (lásd 2. Példa):

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c_o^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Példa (Diagonális alak): Induljunk ki a $G(s)$ átviteli függvény parciális tört alakban való felírásából:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}U(s) =$$

$$= \left[\frac{r_1}{s-\lambda_1} + \frac{r_2}{s-\lambda_2}\right]U(s),$$

ahol λ_1, λ_2 az $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei,

r_1, r_2 pedig a λ_1, λ_2 gyökökhöz (a $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ átviteli függvény pólusaihoz) tartozó reziduumok:

$$r_1 = \lim_{s\to\lambda_1}(s-\lambda_1)\frac{b_1 s + b_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{b_1\lambda_1 + b_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$r_2 = \lim_{s\to\lambda_2}(s-\lambda_2)\frac{b_1 s + b_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{b_1\lambda_2 + b_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Vezessük be új változóként az $X_1(s)$, $X_2(s)$ változókat, ahol

$$X_1(s) = \frac{r_1}{s-\lambda_1}U(s)$$
$$X_2(s) = \frac{r_2}{s-\lambda_2}U(s)$$
$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

amiből

$$(s-\lambda_i)X_i(s) = r_iU(s)$$
$$sX_i(s) = \lambda_iX_i(s) + r_iU(s), \quad i = 1,2.$$

Ekkor időtartományban a következő elsőrendű differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + r_i u, \quad i = 1,2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Az állapotegyenletek mátrixos alakban felírva:

$$\dot{x}_d = A_d x_d + b_d u$$
$$y = c_d^T x_d,$$

ahol az (A_d, b_d, c_d^T) jelölésben a d index az A_d mátrix diagonális alakjára utal,

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad b_d = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad c_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az előző két példában egy adott rendszer átviteli függvényéből kétféle módon írtuk fel az állapotegyenleteket. Ebből látható, hogy egy dinamikus rendszer adott dimenziójú állapottér reprezentációja nem egyértelmű.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy adott x állapotvektorból egy új $\bar{x}$ állapotvektort képezünk az alábbi módon:

$$\bar{x} = Tx$$

ahol $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy $n \times n$ méretű nemszinguláris transzformációs mátrix, és $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Tegyük fel, hogy az x állapotvektor az (A, b, c^T) állapottér reprezentációhoz tartozik:

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x,$$

Határozzuk meg az $\bar{x}$ állapotvektorhoz tartozó

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u$$
$$y = \bar{c}^T \bar{x}$$

egyenletekben szereplő $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$ mátrixokat.

Mivel $x = T^{-1}\bar{x}$, ezt behelyettesítve az állapotegyenletbe kapjuk, hogy

$$T^{-1}\dot{\bar{x}} = AT^{-1}\bar{x} + bu$$
$$y = c^T T^{-1}\bar{x},$$

azaz

$$\dot{\bar{x}} = TAT^{-1}\bar{x} + Tbu$$
$$y = c^T T^{-1}\bar{x},$$

tehát

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{b} = Tb, \quad \bar{c}^T = c^T T^{-1}.$$

Az A és $\bar{A}$ mátrixok közötti fenti kapcsolatot **hasonlósági transzformációnak** nevezzük.

Egy rendszer adott dimenziós állapottér reprezentációi egymásból hasonlósági transzformációval alakíthatók át.