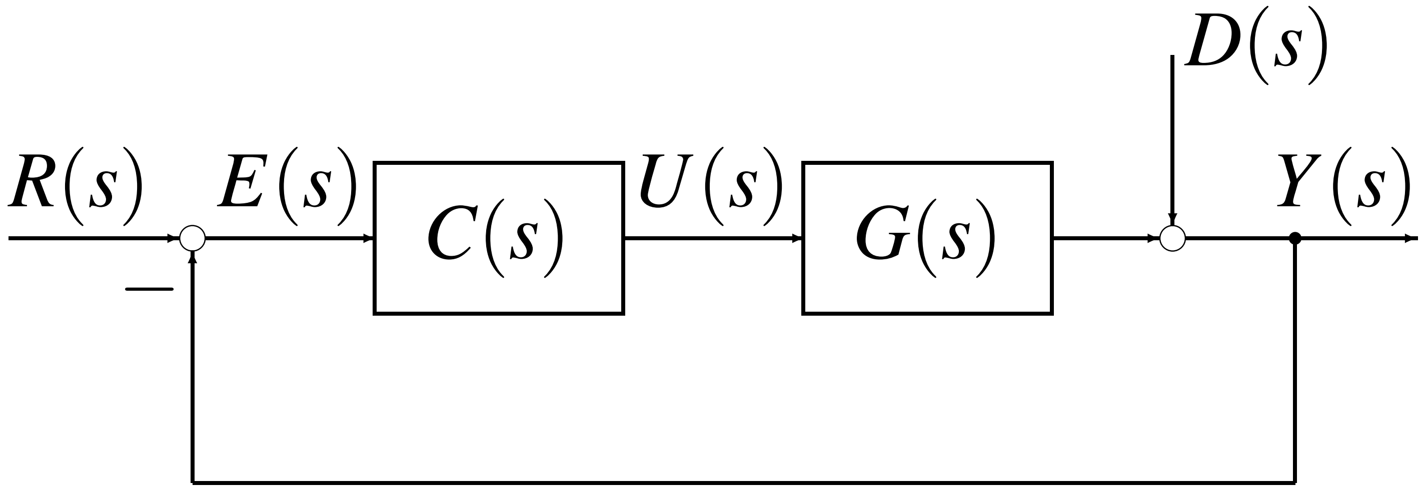
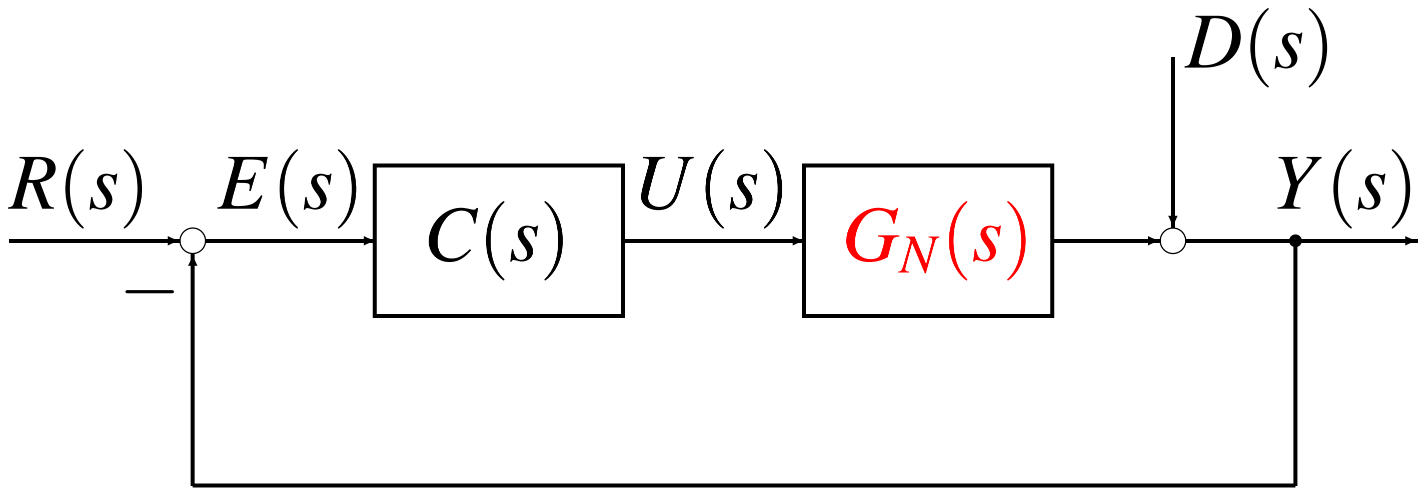
Robusztus stabilitás

- Additív hibastruktúra
- Multiplikatív hibastruktúra

Szabályozási rendszer tervezésének gyakorlati problémája az, hogy az aktuális rendszer $G(s)$ átviteli függvényének pontos alakja nem ismert, s emiatt helyette annak közelítő, ún. névleges (nominális) $G_N(s)$ modelljét kell felhasználni.
Ekkor a $C(s)$ szabályozót a névleges modell alapján kell megtervezni úgy, hogy az ne csak a névleges modell, hanem az aktuális rendszer stabilitását is garantálja. Ezt *robusztus stabilitásnak* nevezzük.


D(s)
R(s)
E(s)
C(s)
U(s)
G(s)
Y(s)
—


D(s)
R(s)
E(s)
C(s)
U(s)
G_N(s)
Y(s)
—

- A modell és a rendszer közötti hiba meghatározására általános megoldás nincs, különböző szerkezetű lehetőségek közül az *additív*, illetve a *multiplikatív* hibastruktúra a legismertebb.
- A névleges modell felhasználásával szabályozott rendszer $G_{HN}(s)$ hurokátviteli függvénye a következő :

$$G_{HN}(s) = C(s)G_N(s),$$

míg a kompenzált aktuális rendszer $G_H(s)$ átviteli függvénye:

$$G_H(s) = C(s)G(s),$$

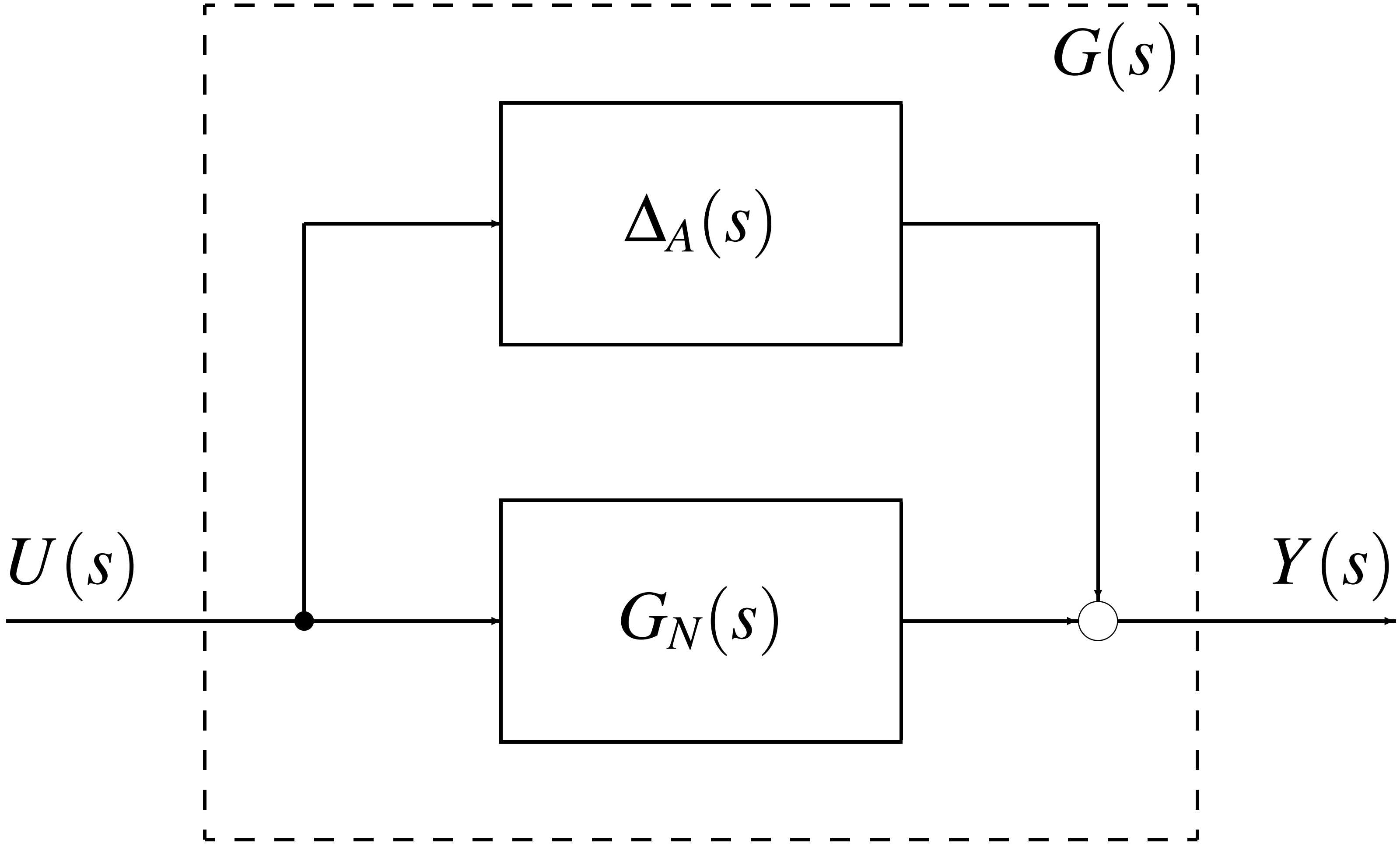
ahol $C(s)$ a soros kompenzátor átviteli függvényét reprezentálja.

1. Definíció: Additív hibastruktúra

A $G(s)$ *aktuális rendszer és a* $G_N(s)$ *névleges rendszer közötti eltérést additív hibastruktúrájúnak nevezzük, ha a következő összefüggés teljesül:*

$$G(s) = G_N(s) + \Delta_A(s),$$

ahol $\Delta_A(s)$ *az additív hiba átviteli függvénye.*


$G(s)$
$\Delta_A(s)$
$U(s)$
$G_N(s)$
$Y(s)$

- Az additív hibastruktúrában a $\Delta_A(i\omega)$ hibafüggvény ismeretlen ugyan, de abszolút értékére a gyakorlati problémákban ismert felső határ adható meg:

$$|\Delta_A(i\omega)| < d_A(\omega).$$

- Tegyük fel, hogy a $G_{HN}(s)$ kompenzált névleges rendszer stabilis. Vizsgáljuk meg, hogy a $G_H(s)$ aktuális rendszer stabilitásához milyen feltételnek kell teljesülnie!

1. Állítás

Legyen $G_N(s)$ az ismert névleges modell, amelyet a tervezett $C(s)$ soros kompenzátor stabilizál. Tegyük fel, hogy a névleges modell és az aktuális rendszer közötti additív hiba felső korlátját a teljes ω frekvenciatartományban ismerjük.

Ekkor a névleges modellre tervezett szabályozó az aktuális rendszer stabilitását is biztosítja, ha a következő feltétel teljesül:

$$\frac{1}{d_A(\omega)} > \left| \frac{C(i\omega)}{1 + G_{HN}(i\omega)} \right|$$

Ez a robusztus stabilitás feltétele additív hibastruktúra esetén.

1. Bizonyítás

$$G_H(i\omega) = C(i\omega)\left(G_N(i\omega) + \Delta_A(i\omega)\right)$$
$$G_H(i\omega) = C(i\omega)G_N(i\omega) + C(i\omega)\Delta_A(i\omega)$$
$$G_H(i\omega) - G_{HN}(i\omega) = C(i\omega)\Delta_A(i\omega)$$

De csak a $d_A(\omega) \geq |\Delta_A(i\omega)|$ felső korlát ismert, így:

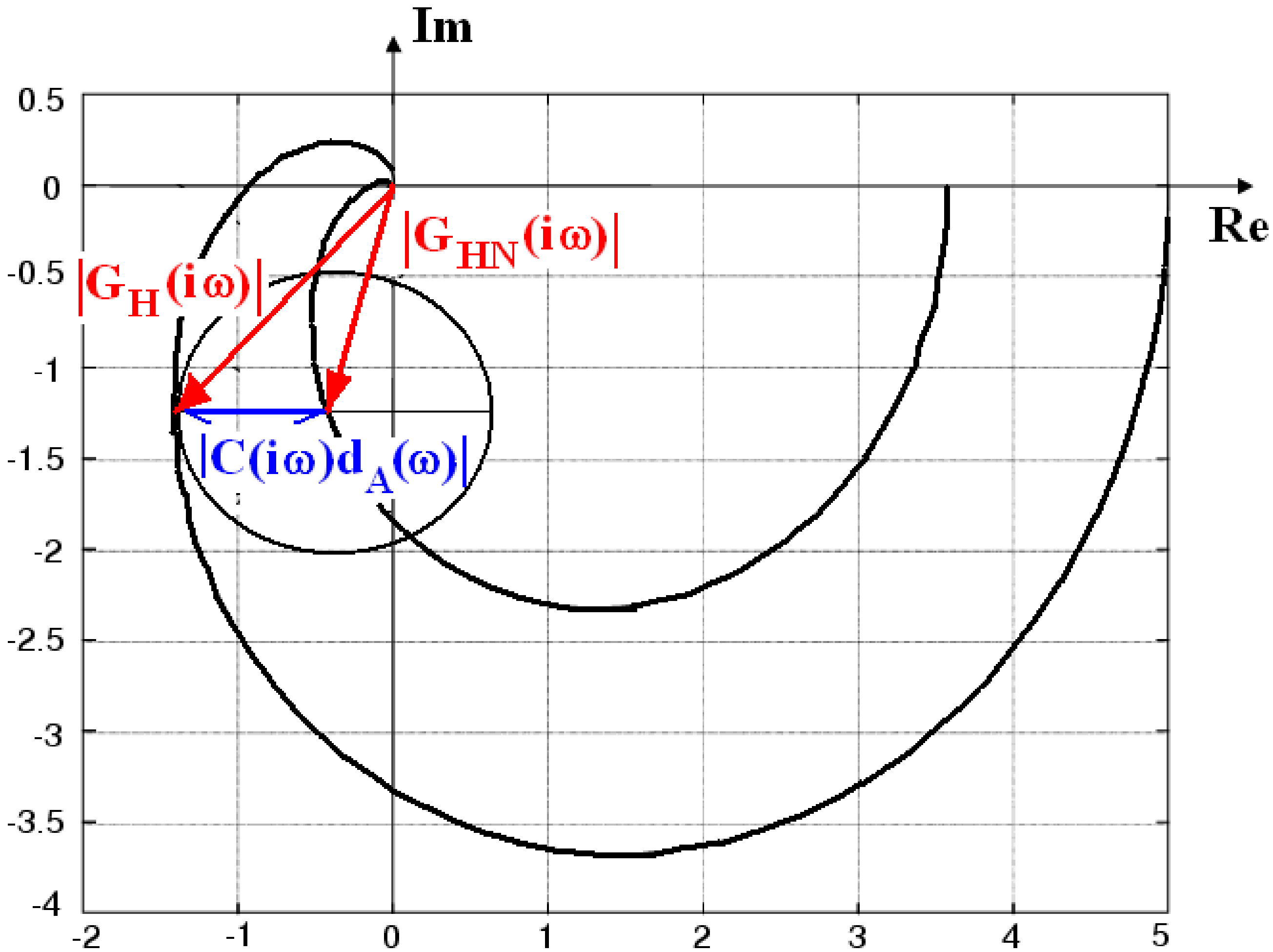
$$|G_H(i\omega) - G_{HN}(i\omega)| \leq |C(i\omega)|d_A(\omega)$$

Nyquist stabilitási kritériuma alapján kritikus határpont (a stabilitás határa) a $G_H(i\omega) = -1$ pont. Így vizsgálandó a $G_{HN}(i\omega)$ és a -1 pont közötti különbség. Ha ez a különbség nagyobb, mint $|C(i\omega)|d_A(\omega)$ akkor a tényleges rendszer Nyquist diagramja a -1 pontot nem öleli körbe, mert

$$|G_H(i\omega) - G_{HN}(i\omega)| \leq |C(i\omega)|d_A(\omega) < |-1 - G_{HN}(i\omega)|$$

$$
\begin{aligned}
|C(i\omega)|d_A(\omega) &< |-1-G_{HN}(i\omega)| = |1+G_{HN}(i\omega)| \\
d_A(\omega) &< \frac{|1+G_{HN}(i\omega)|}{|C(i\omega)|} \\
\frac{1}{d_A(\omega)} &> \left|\frac{C(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)}\right|
\end{aligned}
$$

$d_A(\omega)$-nak csak nagysága ismert, iránya nem, így $G_H(i\omega)$ legrosszabb esete a $G_{HN}(i\omega)$ pontok köré rajzolt $|C(i\omega)|d_A(\omega)$ sugarú körök burkológörbéje.

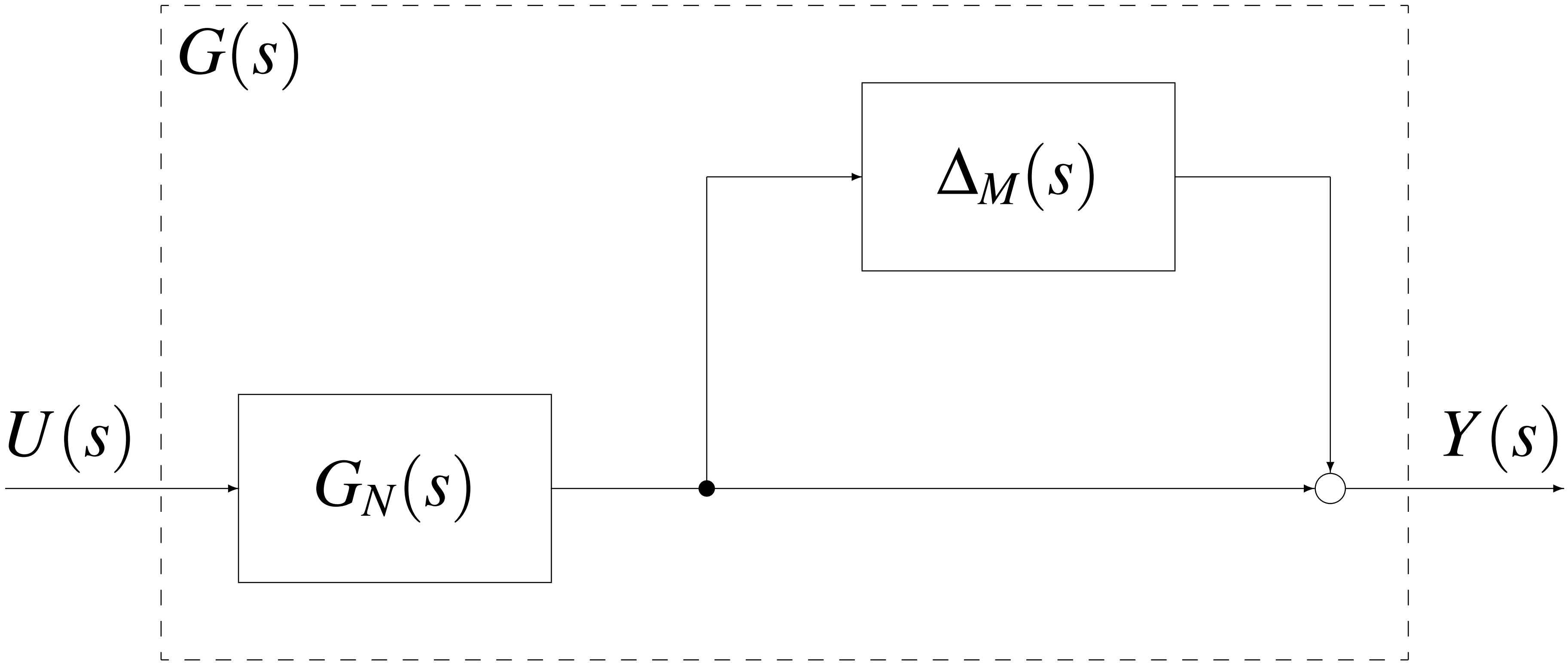

Im
Re
|G_H(iω)|
|G_HN(iω)|
|C(iω)d_A(ω)|
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-2
-1
0
1
2
3
4
5

2. Definíció: Multiplikatív hibastruktúra

A $G(s)$ aktuális rendszer és a $G_N(s)$ névleges rendszer közötti eltérést multiplikatív hibastruktúrájúnak nevezzük, ha a következő összefüggés teljesül:

$$G(s) = G_N(s)(1 + \Delta_M(s)),$$

ahol $\Delta_M(s)$ a multiplikatív hiba átviteli függvénye.


$G(s)$
$\Delta_M(s)$
$U(s)$
$G_N(s)$
$Y(s)$

- multiplikatív hibastruktúrában $\Delta_M(i\omega)$ stabilis átviteli függvény ismeretlen ugyan, de abszolút értékére a gyakorlati problémákban ismert felső határ adható meg:

$$|\Delta_M(i\omega)| < d_M(\omega)$$

- Tegyük fel, hogy a $G_{HN}(s)$ kompenzált névleges rendszer stabilis. Vizsgáljuk meg, hogy a $G_H(s)$ aktuális rendszer stabilitásához milyen feltételnek kell teljesülnie!

2. Állítás

Legyen $G_N(s)$ az ismert névleges modell, amelyet a tervezett $C(s)$ soros kompenzátor stabilizál. Tegyük fel, hogy a névleges modell és az aktuális rendszer közötti multiplikatív hiba felső korlátját a teljes ω frekvenciatartományban ismerjük.

Ekkor a névleges modellre tervezett szabályozó az aktuális rendszer stabilitását is biztosítja, ha a következő feltétel teljesül:

$$\frac{1}{d_M(\omega)} > \left| \frac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)} \right|$$

Ez a robusztus stabilitás feltétele multiplikatív hibastruktúra esetén.

2. Bizonyítás

$$
\begin{aligned}
G_H(i\omega) &= C(i\omega)G_N(i\omega)(1+\Delta_M(i\omega)) \\
G_H(i\omega) &= C(i\omega)G_N(i\omega)+C(i\omega)G_N(i\omega)\Delta_M(i\omega) \\
G_H(i\omega) &- G_{HN}(i\omega) = G_{HN}(i\omega)\Delta_M(i\omega)
\end{aligned}
$$

Hasonlóan az additív teszt bizonyításához, az aktuális $G_H(i\omega)$ *rendszer stabilis marad minden* ω *frekvencián, ha teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\begin{aligned} |G_{HN}(i\omega)|d_M(\omega) &< |1+G_{HN}(i\omega)| \\ d_M(\omega) &< \left|\frac{1+G_{HN}(i\omega)}{G_{HN}(i\omega)}\right| \end{aligned}$$

A gyakorlati tervezéskor a pontról - pontra való összevetés helyett használható az alábbi két konzervatív feltétel:

$$\inf_{\omega} \frac{1}{d_A(\omega)} > \sup_{\omega} \left| \frac{C(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)} \right|$$

$$\inf_{\omega} \frac{1}{d_M(\omega)} > \sup_{\omega} \left| \frac{G_{HN}(i\omega)}{1+G_{HN}(i\omega)} \right|$$

Példa: Robusztus stabilitási teszt alkalmazása

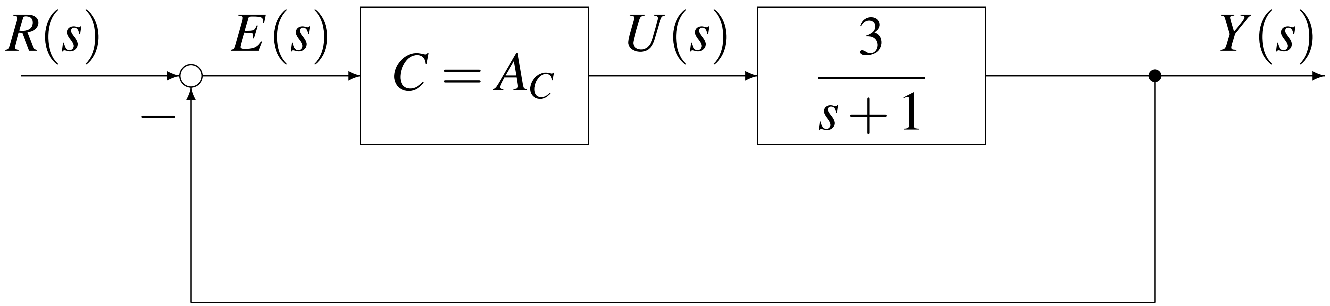
Tételezzük fel, hogy a szabályozni kívánt rendszert a

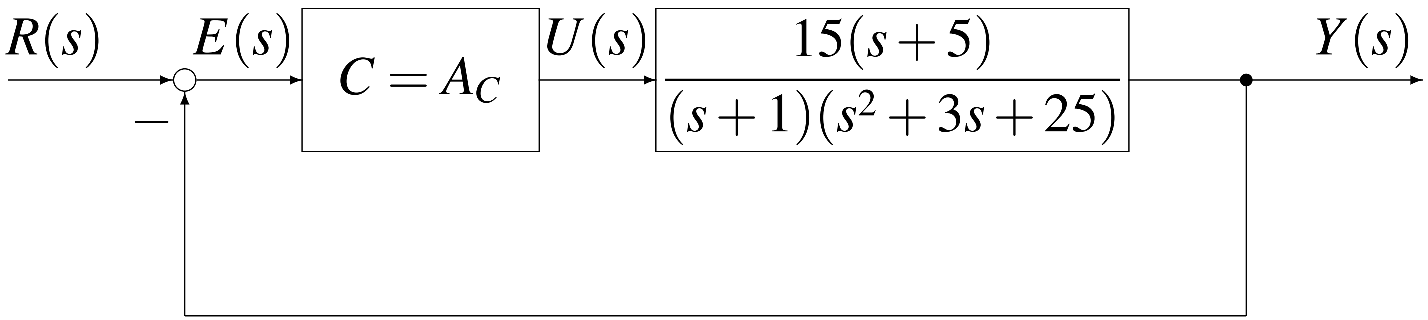
$$G(s) = \frac{15(s+5)}{(s+1)(s^2+3s+25)}$$

átviteli függvény írja le. A feladat, hogy a rendszer egy egytárolós névleges közelítő modelljének ismerete alapján, tervezzük meg a zárt rendszert úgy, hogy a stabilitás megtartása mellett a lehető legnagyobb legyen a körerősítés.

Az alkalmazható szabályozó egyszerű arányos tag lehet. A modell vagy az ún. névleges rendszer átviteli függvénye:

$$G_N(s) = \frac{3}{s+1}$$


$R(s)$
$E(s)$
$C = A_C$
$U(s)$
$\dfrac{3}{s+1}$
$Y(s)$
$-$


$R(s)$
$E(s)$
$C = A_C$
$U(s)$
$\dfrac{15(s+5)}{(s+1)(s^2+3s+25)}$
$Y(s)$
$-$

Megoldás

$$\Delta_M(s) = \frac{G(s)-G_N(s)}{G_N(s)} = \frac{-s^2+2s}{s^2+3s+25}$$

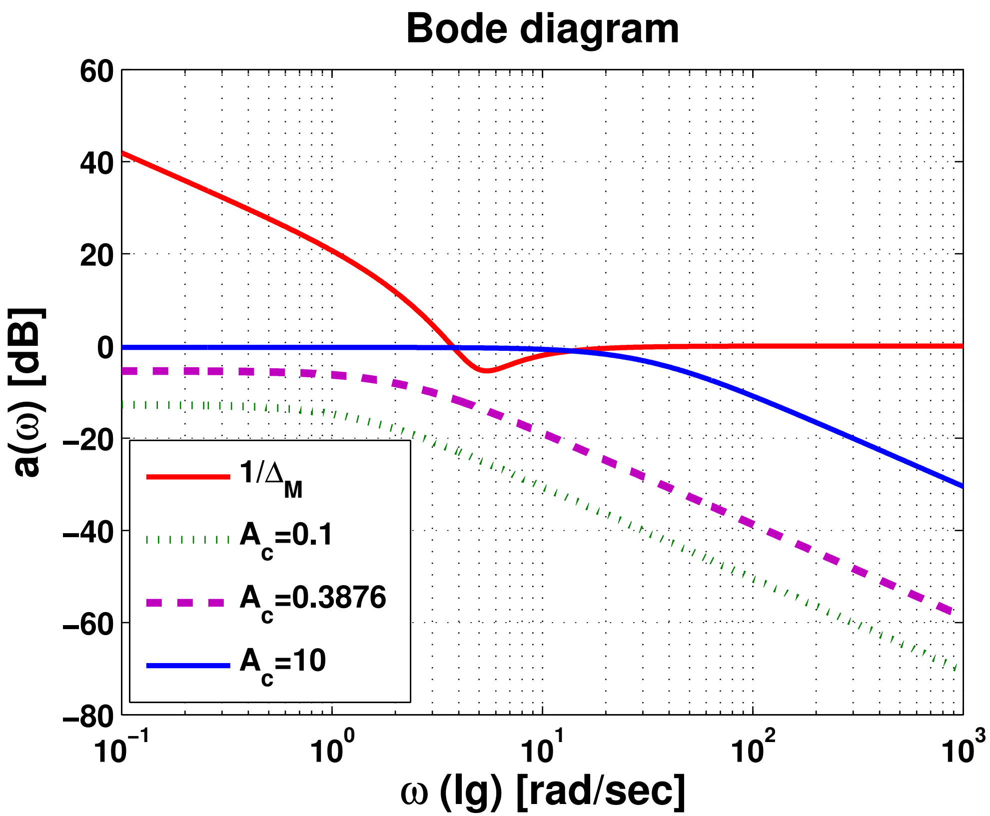
A névleges modellel a névleges zárt szabályozási kör struktúrálisan stabilis, tehát bármilyen nagy A_c köre- rősítés mellett a névleges zárt rendszer stabilis marad. Egy adott érték feletti erősítés azonban a valódi zárt rendszert már destabilizálja.

A robusztus stabilitás feltétele:

$$\sup_{\omega} \left| \frac{G_{HN}(i\omega)}{1 + G_{HN}(i\omega)} \right| < \frac{1}{\sup_{\omega} |\Delta_M(i\omega)|}$$

ahol $G_{HN}(i\omega) = A_c G_N(i\omega)$ a névleges hurokátviteli függvény.

Megrajzolva a $\Delta_M(i\omega)$ Bode-diagramját, leolvashatjuk az ω szerinti maximális értéket, így teljesül, hogy $|\Delta_M(i\omega)| < 1,86$.



A tesztben szereplő kiegészítő érzékenységi függvény:

$$T_N(i\omega) \;=\; \frac{\frac{3A_c}{i\omega+1}}{1+\frac{3A_c}{i\omega+1}} = \frac{3A_c}{i\omega+1+3A_c}$$

$$\sup_{\omega} T_N(i\omega) \;=\; \frac{3A_c}{1+3A_c}$$

Ebből következik, hogy a robusztus stabilitás olyan A_c szabályozó erősítésekre teljesül, amelyekre

$$\frac{3A_c}{1+3A_c} < \frac{1}{1,86}$$

$$A_c < 0,3876$$