Zárt szabályozási körök minőségi jellemzői

- Asszimptotikus jelkövetés
- Túllendülés
- Zavarkompenzálás

A szabályozási körök minőségi jellemzésére bevezetünk két időtartományban és egy frekvenciatartományban értelmezett fogalmat.
Ezek a σ **túllendülés**, T_s **szabályozási idő**, és a ω_B **sávszélesség**.

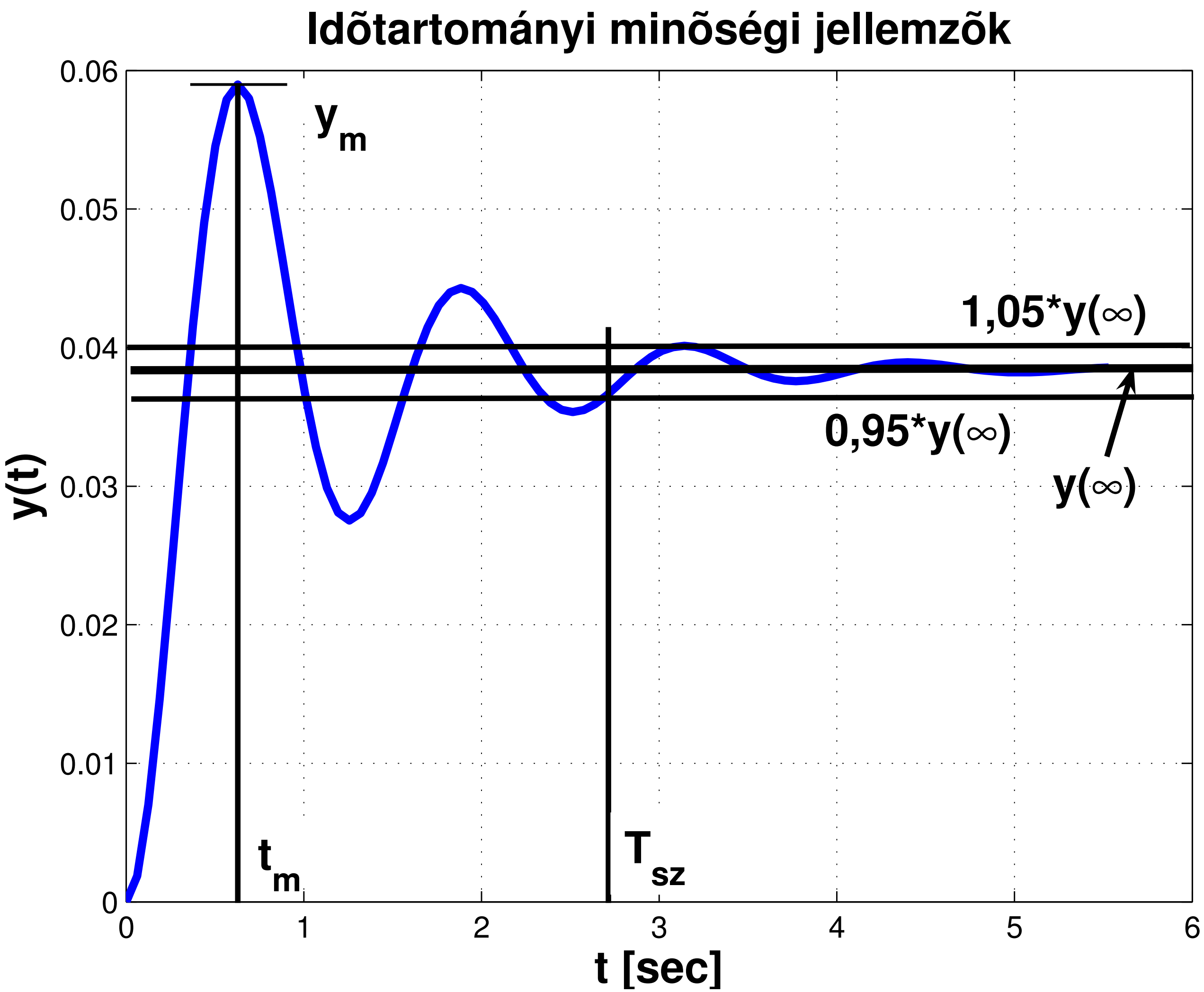
A σ TÚLLENDÜLÉST egységugrás referencia jelre a következőképp értelmezzük:

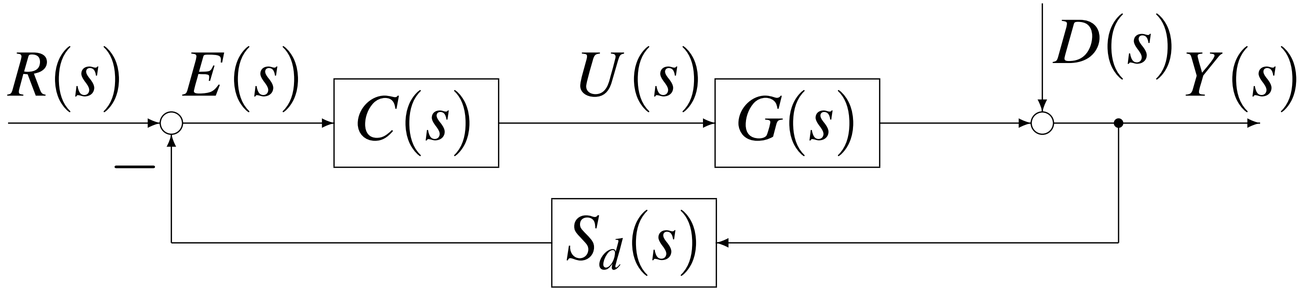
$$\sigma = \frac{\max_t |y(t) - y(\infty)|}{|y(\infty)|}$$

A T_s az a legkisebb T, amelyre

$$ha \quad t \geq T \ , \quad akkor \quad \max_t |y(t) - y(\infty)| \leq \text{const} \cdot |y(\infty)|$$

ahol a konstans értéke tipikusan néhány század.


Idõtartományi minõségi jellemzõk
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
y(t)
0
1
2
3
4
5
6
t [sec]
y
m
t
m
T
sz
1,05*y(∞)
0,95*y(∞)
y(∞)

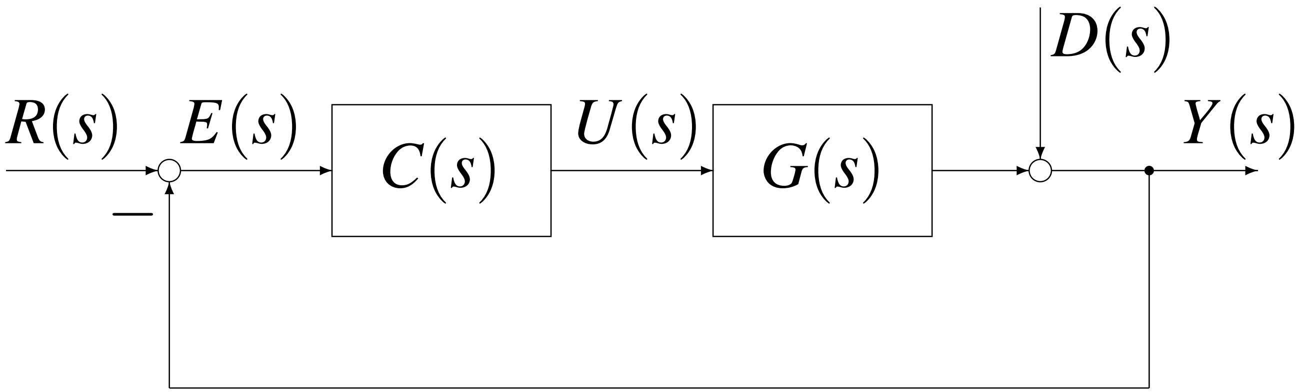


$C(s)$	a szabályozó átviteli függvénye
$G(s)$	a rendszer átviteli függvény
$S_d(s)$	a szenzordinamika átviteli függvénye
$R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$	referencia jel vagy alapjel
$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$	hibajel (jelkövetés esetén követési hiba)
$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$	a beavatkozó jel (control input)
$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\}$	a szabályozási rendszeren belül ható zaj vagy zavarás

Szenzordinamika esetén (lásd fent) a hurokátviteli függvény:

$$G_H(s) = C(s)G(s)S_d(s)$$

Szenzordinamika nélkül, ún. merev visszacsatolás esetén:



Ekkor $S_d(s) = 1$, így a hurokátviteli függvény:

$G_H(s) = C(s)G(s)$

***Megjegyzés*:**

A folytatásban a fogalmakat szenzordinamika nélküli esetre írjuk fel!

A szabályozási körben értelmezett átviteli függvények:

- $S(s)$ **érzékenységi függvény**,
- $T(s)$ **kiegészítő érzékenységi függvény**

amelyeket a következőképpen definiálunk:

$$
\begin{aligned}
Y(s)\Big|_{R\equiv 0} &= \frac{1}{1+G(s)C(s)}D(s) = \frac{1}{1+G_H(s)}D(s) = S(s)D(s) \\
Y(s)\Big|_{D\equiv 0} &= \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}R(s) = \frac{G_H(s)}{1+G_H(s)}R(s) = T(s)R(s)
\end{aligned}
$$

$S(s)$	$+$	$T(s)$	$=1$
Érzékenységi függvény	+	Kiegészítő érzékenységi függvény	
Zavaró jellemzőre vonatkozó átviteli függvény		Referencia (alap) jelre vonatkozó átviteli függvény	

Az $S(i\omega)$ érzékenységi és a $T(i\omega)$ kiegészítő érzékenységi függvények közelítő ábrázolását BODE-diagramon a felnyitott hurok $G_H(i\omega)$ frekvenciafüggvénye alapján a következőképp végezhetjük el.

Definíció szerint

$$|S(i\omega)| = \left|\frac{1}{1+G_H(i\omega)}\right| \qquad \forall\omega.$$

Kis és nagy körfrekvenciákra a következő közelítést használhatjuk:

$$|S(i\omega)| \approx \begin{cases} \dfrac{1}{|G_H(i\omega)|} & \text{ha } |G_H(i\omega)| \gg 1 \quad \text{azaz ha } \omega \ll \omega_c \\ 1 & \text{ha } |G_H(i\omega)| \ll 1 \quad \text{azaz ha } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

A kiegészítő érzékenységi függvény esetében hasonló meggondolással járhatunk el.

Definíció szerint

$$|T(i\omega)| = \left|\frac{G_H(i\omega)}{1+G_H(i\omega)}\right| \qquad \forall\omega,$$

aminek kis és nagy körfrekvenciákra a közelítése

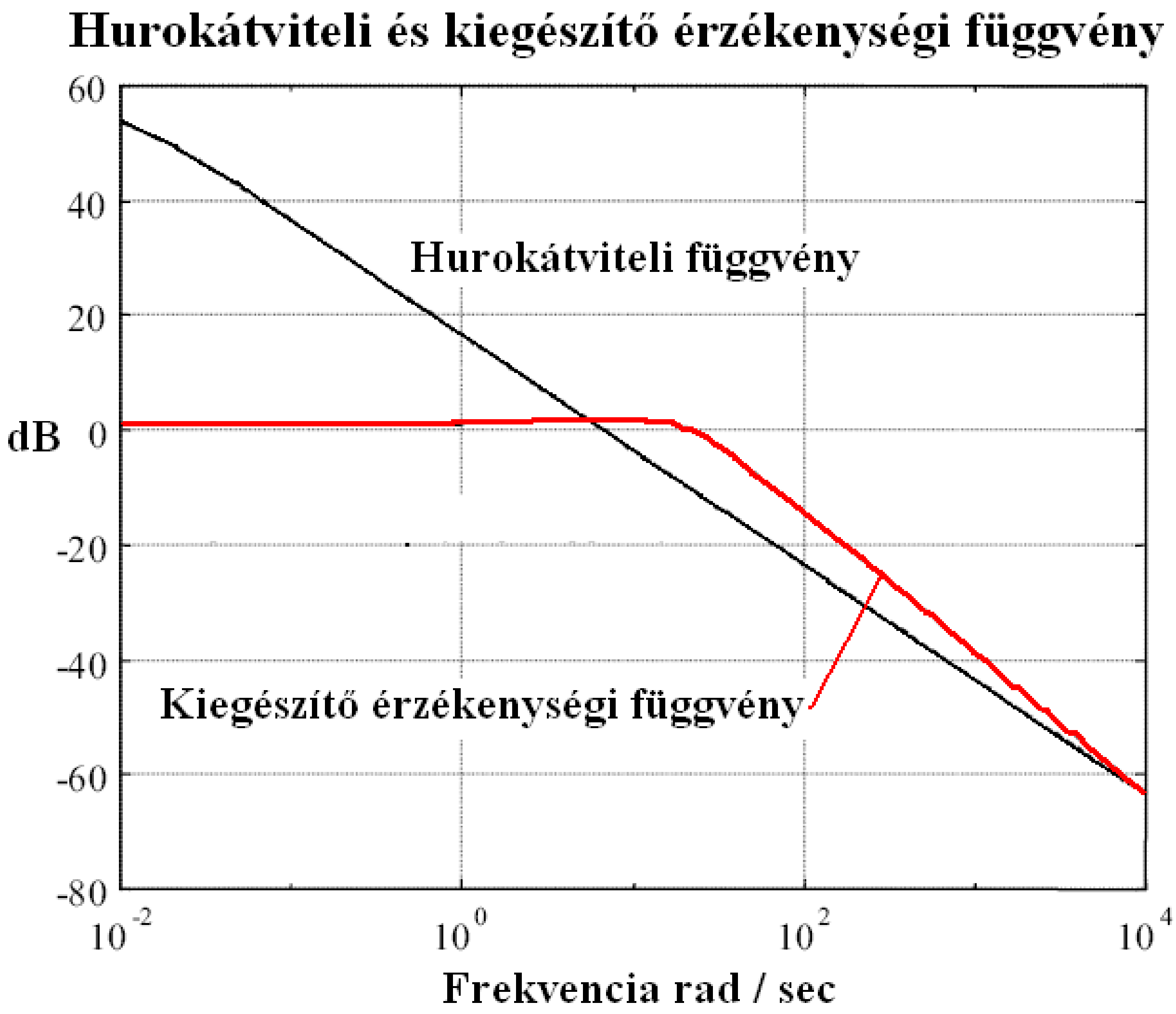
$$|T(i\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \text{ha } |G_H(i\omega)| \gg 1 \quad \text{azaz ha } \omega \ll \omega_c \\ |G_H(i\omega)| & \text{ha } |G_H(i\omega)| \ll 1 \quad \text{azaz ha } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

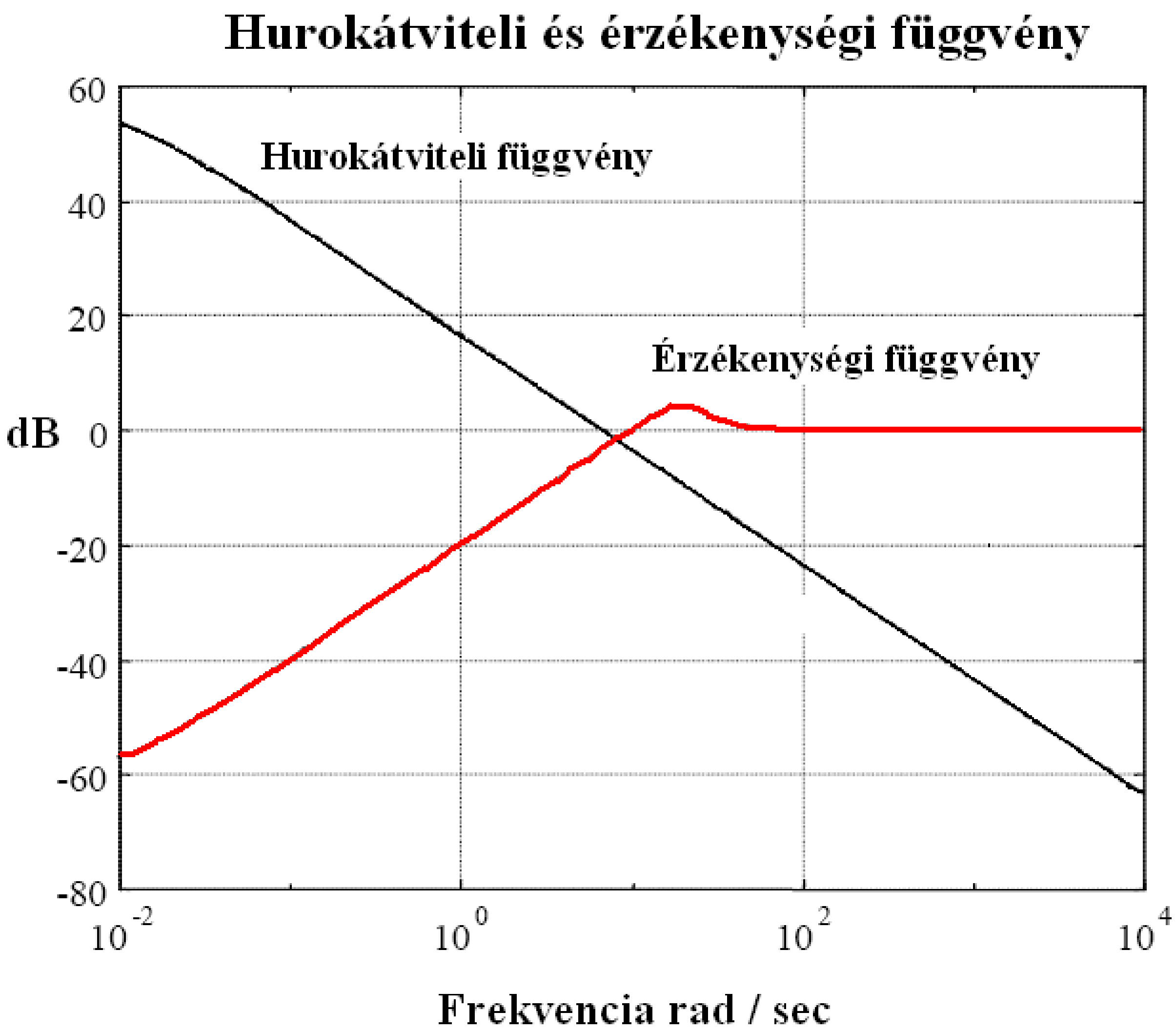
A fenti közelítések természetesen az ω_c vágási körfrekvencia környezetében nem érvényesek.

A fenti közelítések alapján az $|S(i\omega)|$ amplitúdó függvényt kis körfrekvenciákra úgy kapjuk, hogy az ω_c vágási körfrekvenciától balra a $|G_H(i\omega)|$ függvényt tükrözzük a 0 dB-es tengelyre.

Az $|S(i\omega)|$ függvény az ω_c vágási körfrekvenciától jobbra a 0 dB-es tengelyen halad.

A kiegészítő érzékenységi függvény közelítését hasonló megfontolásokkal rajzolhatjuk meg.


Hurokátviteli és kiegészítő érzékenységi függvény
60
40
20
dB 0
-20
-40
-60
-80
Hurokátviteli függvény
Kiegészítő érzékenységi függvény
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
10^{4}
Frekvencia rad / sec


Hurokátviteli és érzékenységi függvény
Hurokátviteli függvény
Érzékenységi függvény
dB
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
10^{4}
Frekvencia rad / sec

A **sávszélesség** fogalmát a kiegészítő érzékenységi függvény segítségével a következőképp adhatjuk meg. A rendszer sávszélessége az az $\omega \leq \omega_B$ frekvenciatartomány, amelyben az $|T(i\omega)|$ kiegészítő érzékenységi függvény Bode diagramja $-3\ dB$-re csökken, azaz

$$20\log|T(i\omega_B)| = -3\text{dB}.$$

Miután az ω_B a gyakorlati esetek többségében közel van az ω_c vágási körfrekvenciához, szokásos a sávszélességet az ω_c -vel közelíteni.

A **szabályozási idő** és a sávszélesség kapcsolatát az alábbi (heurisztikus) összefüggés adja meg:

$$\omega_c \approx \omega_B \qquad \frac{\pi}{\omega_c} \leq T_s \leq \frac{3\pi}{\omega_c}.$$

A továbbiakban a szabályozási rendszerek minőségi jellemzőit érintő szabályozási feladatokat mutatunk be. Ezek az **aszimptotikus jelkövetés**, a **túllendülés** és a **zavarkompenzálás** feladata.

Követő szabályozásoknál a kimenőjelnek a referencia jeltől való eltérését **követési hibának** nevezzük:

$$e(t) = y(t) - r(t).$$

Feladat: Vizsgáljuk meg, hogy adott $r(t)$ referencia jelre aszimptotikusan mekkora lesz az eltérés, azaz a követési hiba.

A követési hiba jel és a referencia jel Laplace-transzformáltjai közötti kapcsolatot az $S(s)$ ÉRZÉKENYSÉGI FÜGGVÉNY írja le:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = (S(s) + T(s)) \cdot R(s) - T(s) \cdot R(s) = S(s) \cdot R(s)$$

Alkalmazva a határérték tételeket:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot S(s) \cdot R(s).$$

Vizsgálhatjuk a tipikus referencia jelek, mint egységugrás vagy egység sebességugrás jelek aszimptikus követését.

Legyen $r(t) = 1(t)$, $R(s) = 1/s$.

Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G_H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_H(s)}.$$

Ha $G_H(s)$ integráló jellegű, azaz ha $G_H(s) = G_{H0}(s)/s$, $G_{H0}(s)|_{s=0} < \infty$ alakú, akkor

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_{H0}(s)/s} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+G_{H0}(s)} = 0,$$

tehát a követési hiba aszimptotikusan zérus.

A **túllendülést** a kimenőjel állandósult értékéhez viszonyított legnagyobb eltérésének abszolút értékeként definiálhatjuk, amelyet még az állandósult értékhez szokták viszonyítani. Ennek megfelelően egy egységugrás alakú bemenőjelet alkalmazva a túllendülést a következőképp adhatjuk meg:

$$\sigma = \frac{\max_t |y(t) - y(\infty)|}{|y(\infty)|}$$

A túllendülésre egy becslést a zárt rendszer $g_z(t) = \mathcal{L}^{-1}\{T(s)\}$ súlyfüggvénye alapján kaphatunk.

Ha $r(t)$ amplitudó korlátos, akkor megvizsgálhatjuk, hogy milyen becslést kaphatunk a kimenőjel egy (legkisebb) felső korlátjára. A referencia jel és a kimenőjel kapcsolatát az alábbi konvolúcióval írhatjuk le:

$$y(t) = \int_0^\infty g_z(\tau) r(t-\tau) d\tau,$$

Ebből az összefüggésből kapjuk, hogy

$$\|y(t)\|_\infty \leq \|r(t)\|_\infty \int_0^\infty |g_z(\tau)| d\tau,$$

ahol $\|y(t)\|_\infty$ és $\|r(t)\|_\infty$ a kimenőjel, ill. a zárt szabályozási kör bemenőjelének (a referencia jelnek) a legkisebb felső korlátja:

$$\|y\|_\infty = \sup_{0 \leq t < \infty} |y(t)|.$$

$$\|r\|_\infty = \sup_{0 \leq t < \infty} |r(t)|.$$

Cél: Mivel a zárt rendszer súlyfüggvénye a szabályozó megválasztásától függ, a cél olyan szabályozó tervezése, amely minimalizálja a zárt rendszer súlyfüggvényének abszolút integrálját.

Az aszimptotikus **zavarkompenzálást** az aszimptotikus referencia-jelkövetéshez hasonlóan vizsgáljuk.

Tipikus zavaró jelek (pl. *egységugrás*, *egység sebességugrás*) hatását a kimenő jelben zérus referencia jel feltételezése mellett vizsgáljuk. Ehhez felírjuk a kimenő jel és a zavaró jel Laplace-transzformáltjai közötti összefüggéseket és alkalmazzuk a határérték tételeket.

A kimenő és a zavaró jel közötti átviteli függvény az $S(s)$ ÉRZÉKENYSÉGI FÜGGVÉNY. Ennek alapján a kimenőjel Laplace-transzformáltja:

$$Y(s)\Big|_{R\equiv 0} = S(s)D(s) = \frac{1}{1+G_H(s)}D(s).$$

Alkalmazva a határérték tételt:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)\Big|_{r\equiv 0} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_H(s)}D(s).$$

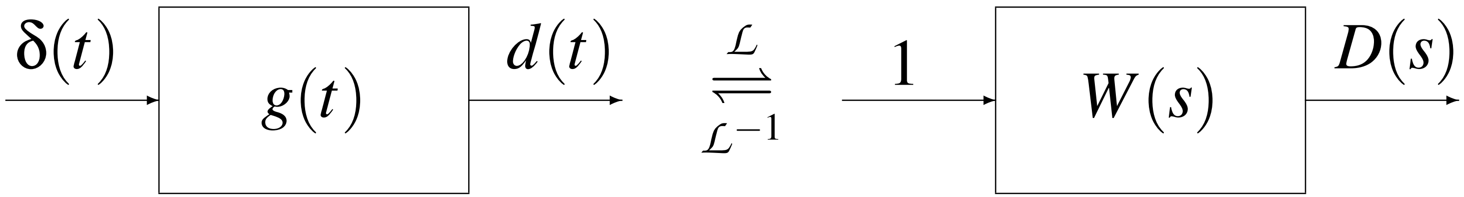
Legyen például $d(t) = 1(t)$, $D(s) = 1/s$ és tegyük fel, hogy a hurokátviteli függvény olyan alakú, hogy $G_H(s) = G_{H0}(s)/s$.

Ekkor:

$$\lim_{s\to 0} s \frac{s}{s + G_{H0}(s)} \frac{1}{s} = 0.$$

Tehát a zavaró jel hatását a rendszer aszimptotikusan teljesen elnyomja, kompenzálja. (*Más tipikus zavaró jelek aszimptotikus hatását a kimenő jelben a fentivel azonos módon vizsgálhatjuk*.)

Az energiakorlátos zajok elnyomását általánosan a következőképp vizsgálhatjuk. Egy energia korlátos $d(t)$ jel előállítható egy stabilis $W(s)$ átviteli függvényű rendszer súlyfüggvényeként: $d(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$ ahol $W(s)$ stabilis, lásd ábra.



Ennek alapján a zavaró jel energiáját a következőképp számíthatjuk:

$$E_d = \int_0^\infty d^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\oint W(s)W(-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(i\omega)W(-i\omega)d\omega.$$

A kimenőjel energiáját zérus referencia jel feltételezése mellett hasonlóképp számítjuk:

$$E_y = \int_0^{\infty} y^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} \frac{W(i\omega)}{1+G_H(i\omega)} \cdot \frac{W(-i\omega)}{1+G_H(-i\omega)} d\omega$$

amiből kapjuk, hogy

$$\|y\|_2 \leq \sup_{\omega} \left| \frac{W(i\omega)}{1+G_H(i\omega)} \right| .$$

Látható, hogy jó zajelnyomást ott tudunk elérni, ahol az érzékenységi függvény kicsi. Az érzékenységi függvény közelítő ábráján látható, hogy ez a vágási körfrekvenciától kisebb frekvencia tartományban érhető el.

Cél: A zavarkompenzálás feladatának megoldásához tehát olyan szabályozót kell terveznünk, amely biztosítja, hogy az érzékenységi függvény Bode-diagramja alatta fut a zavaró jelet generáló átviteli függvény $0\,dB$-es tengelyre tükrözött Bode-diagramjának.