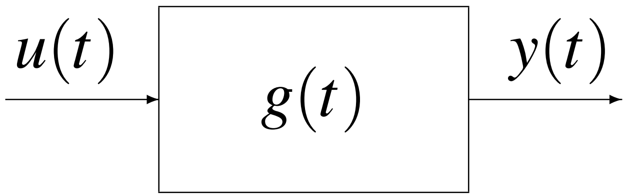
1. **Stabilitáselmélet**
   - stabilitás feltételei
   - inverz inga egyszerűsített modellje
2. Zárt, visszacsatolt rendszerek stabilitása
   - Nyquist stabilitási kritérium
   - Bode stabilitási kritérium

Dinamikus rendszerek egyik fontos kvalitatív tulajdonsága a **stabilitás**.
Amennyiben egy rendszer dinamikus viselkedése nem stabil, akkor irányítási feladat lehet egy olyan szabályozó tervezése, amely stabilizálja a visszacsatolt (zárt) rendszert.
A legtöbb működő rendszert eleve stabilisra tervezik!

Tekintsünk először egy lineáris, időinvariáns, dinamikus rendszert, amelynek bemenőjele $u(t)$, $0 \leq t < \infty$, kimenőjele pedig $y(t)$, $0 \leq t < \infty$.

Adott a rendszer $g(t)$ súlyfüggvénye, illetve ennek $\mathcal{L}$-transzformáltja: $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.



A bemenet/kimenet kapcsolatot zérus kezdeti feltétel mellett az alábbi konvolúciós integrál adja meg:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Feltettük, hogy a rendszer a kezdeti időpontban nyugalmi állapotban van.

Ezután feltehetjük a kérdést, hogy mi a feltétele annak, hogy ha $u(t) > 0$ gerjesztés éri a rendszert, és az $u(t)$ valamilyen tulajdonsággal rendelkezik, a kimenőjel is ugyanilyen tulajdonsággal rendelkezzen.

A bemenőjel tulajdonságai pl. a következők lehetnek:

- Amplitúdó korlátosság: $|u(t)| \leq K_a < \infty, 0 \leq t < \infty.$
- Energia korlátosság: $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \leq K_e < \infty, 0 \leq t < \infty.$

Állítás: *Egy lineáris, időinvariáns, dinamikus rendszer stabil (minden amplitúdó korlátos bemenőjelre amplitúdó korlátos kimenőjelet ad (BIBO = Bounded Input Bounded Output stabilis) akkor és csak akkor, ha*

1. *A rendszer súlyfüggvénye abszolút integrálható,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty$$

2. *A rendszer* $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ *átviteli függvényének pólusai a baloldali komplex félsíkon helyezkednek el, azaz* $Re\, p_i < 0$, $\forall i$, *ahol* p_i *a* $G(s)$ *pólusa.*

3. *A súlyfüggvény határértéke zérus, azaz* $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$.

Az ekvivalens stabilitási feltételek bizonyítása:

1. Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy az (1.) a BIBO stabilitás szükséges és elégséges feltétele. Tegyük fel, hogy $|u(t)| \leq K_a < \infty$, $0 \leq t < \infty$, és a $g(t)$ súlyfüggvény abszolút integrálható. Ekkor a kimenőjelet a konvolúciós integrállal felírva:

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_0^\infty |g(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \leq$$
$$K_a \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < \infty$$

tehát $|y(t)| < \infty$, $0 \leq t < \infty$; a kimenőjel is amplitúdó korlátos (a súlyfüggvény abszolút integrálhatósága tehát elégséges feltétel).

A szükségesség megmutatásához tegyük fel, hogy

$$\int_0^\infty |g(\tau)| d\tau \to \infty.$$

Ekkor tudunk konstruálni olyan korlátos bemenőjelet, hogy a megfelelő kimenőjel nem korlátos. Legyen

$$u(t_1 - \tau) = \operatorname{sign} g(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{ha } g(\tau) > 0 \\ 0 & \text{ha } g(\tau) = 0 \\ -1 & \text{ha } g(\tau) < 0 \end{cases}$$

ahol t_1 egy rögzített időpont.

Ekkor

$$y(t_1) = \int_0^\infty g(\tau)u(t_1-\tau)d\tau = \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \to \infty.$$

Tehát a kimenőjel nem korlátos. A súlyfüggvény abszolút integrálhatósága így szükséges feltétele a BIBO stabilitásnak.

2. Bizonyítás: A definíció szerint

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \quad \text{és} \quad |G(s)| \le \int_0^\infty |g(t)|\left|e^{-st}\right|dt.$$

Mivel

$$\left|e^{-st}\right| \le 1, \quad \text{ha } \mathrm{Re}\, s > 0,$$

ezért

$$|G(s)| \le \int_0^\infty |g(t)|dt, \quad \text{ha } \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Az átviteli függvény abszolút értéke tehát korlátos a jobboldali komplex számsíkon ha a súlyfüggvény abszolút integrálható. Ha $G(s)$ korlátos a jobb félsíkon, akkor itt nem lehet pólusa (csak a bal félsíkon lehet), azaz a pólusok valós része mind negatív.

3. Bizonyítás: A bizonyítás a (2.) feltételből következik. Mivel a $g(t)$ súlyfüggvény lineáris időinvariáns rendszereknél felírható (egyszeres multiplicitású pólusokat feltételezve) a következőképpen:

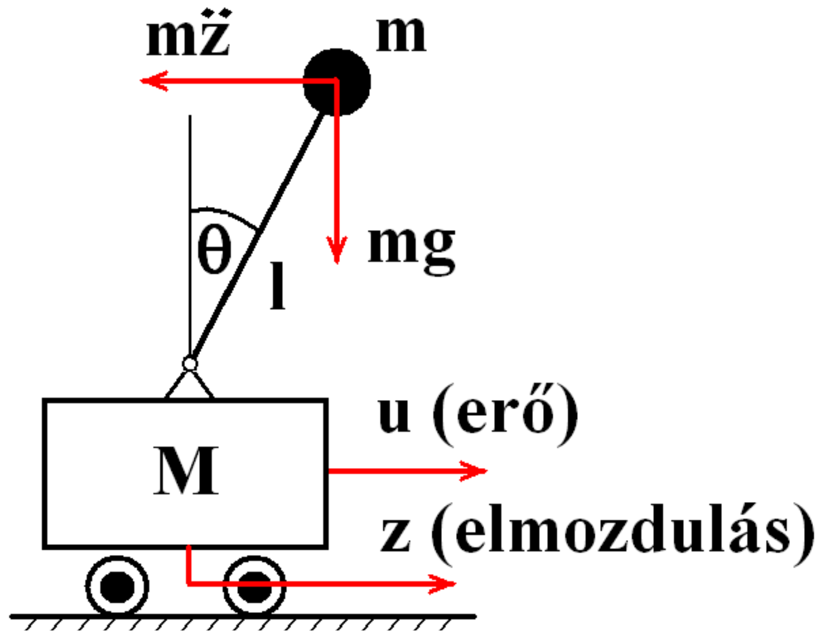
$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t},$$

ahol n a pólusok száma és C_i-k pedig konstans együtthatók, így

$$\lim_{t\to\infty} |g(t)| = 0$$

akkor és csak akkor ha $\mathrm{Re}\, p_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Az inverz inga egy M tömegű kocsira rögzített csapágyon szabadon elforgó rúd, amelynek m tömege a rúd közepére van redukálva (a rúd eredeti hossza $2l$).



Az inverz inga, mint dinamikus rendszer súlyfüggvényének és átviteli függvényének levezetéséhez a newtoni mozgásegyenletekből indulunk ki, amelyeket az M és m tömegekre írunk fel.

A rendszer bemenőjele a kocsira ható horizontális $u(t)$ erő, kimenőjele a rúd vertikális iránytól való elfordulásának $\theta(t)$ szöge.

Jelölje a kocsi elmozdulását a $z(t)$ változó. Kis θ szögelfordulást tekintve a $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$ és $\dot{\theta}^2 \approx 0$ közelítéssekkel a mozgást két egyenlettel írhatjuk le:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{z}(t) + ml\ddot{\theta}(t) &= u(t) \\ ml\ddot{z}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) - mlg\theta(t) &= 0. \end{aligned}$$

A $\mathcal{L}$-transzformációt zérus kezdeti feltételek mellett alkalmazva

$$\begin{aligned} (M+m)s^2 Z(s) + mls^2\Theta(s) - U(s) &= 0 \\ mls^2 Z(s) + ml^2 s^2\Theta(s) - mlg\Theta(s) &= 0 \end{aligned}$$

A mozgásegyenletekből a kocsi $Z(s)$ elmozdulását kiküszöbölve kapjuk a $\Theta(s)$ szögelfordulás függését az $U(s)$ gerjesztő erőtől:

$$\Theta(s) = \frac{1}{(M+m)g - Mls^2}U(s) = \frac{-1/(Ml)}{s^2 + \dfrac{(M+m)g}{-Ml}}U(s).$$

Vizsgáljuk azt az egyszerűsítést, amikor $M \gg m$. Ekkor

$$\Theta(s) \approx \frac{-1/(Ml)}{s^2 - g/l} U(s).$$

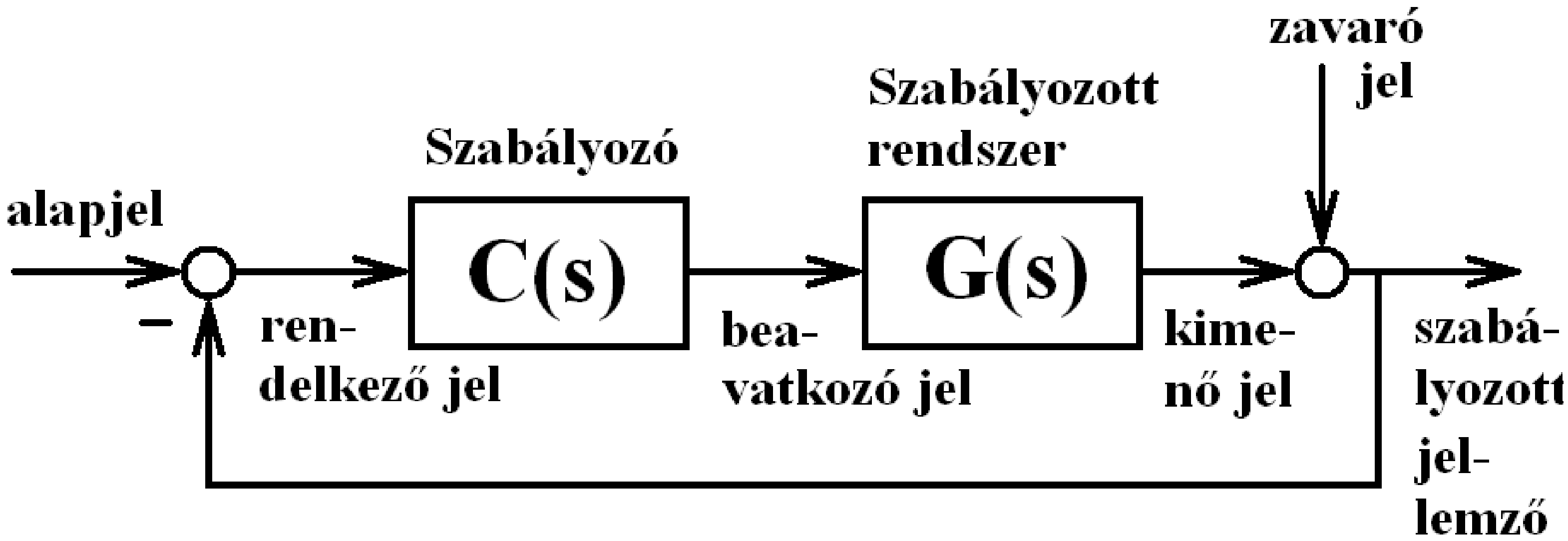
Az átviteli függvény pólusai:

$$p_1 = \sqrt{g/l}, \quad p_2 = -\sqrt{g/l}.$$

A p_1 pólus a jobboldali komplex félsíkra esik, tehát az inverz inga önmagában **instabil**.

1. Stabilitáselmélet
   - stabilitás feltételei
   - inverz inga egyszerűsített modellje
2. **Zárt, visszacsatolt rendszerek stabilitása**
   - Nyquist stabilitási kritérium
   - Bode stabilitási kritérium

A szabályozási kör hatásvázlatát átalakításokkal az alábbi ábrának megfelelő struktúrára hozhatjuk.



A szabályozási kör minden egyes eleme (mind a szabályozó, mind a rendszer) dinamikus rendszer, amely önmagában vizsgálva lehet akár stabil, akár instabil.

Ha a szabályozási körben lévő minden elem, mint dinamikus rendszer *önmagában stabil*, akkor azt mondjuk, hogy a zárt rendszer *belső stabilitási* tulajdonsággal rendelkezik.

Cél: A szabályozó tervezésénél mindig biztosítani kell, hogy akár stabil, akár instabil a szabályozott folyamat, a *zárt rendszer* stabil legyen.

Feladat: A szabályozási kör elemeinek ismeretében döntsük el, hogy a zárt rendszer stabil-e.

A stabilitás vizsgálat feltételezi, hogy a szabályozó és a szabályozott rendszer adott, pl. a súlyfüggvényeikkel vagy átviteli függvényeikkel. A zárt rendszer átviteli függvénye:

$$G_z(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{G_H(s)}{1+G_H(s)},$$

ahol $G_H(s)$ a *hurokátviteli függvény*.

A zárt rendszer stabil akkor és csak akkor, ha pólusai a baloldali komplex félsíkon helyezkednek el, tehát az

$$1 + G_H(s) = 0$$

egyenlet $p_1, \ldots, p_n$ gyökereire teljesül a $\mathrm{Re}\, p_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$ feltétel, ahol n a $G_H(s)$ pólusainak száma.

A NYQUIST stabilitási kritérium a **hurokátviteli függvény** frekvenciafüggvénye alapján képes a **zárt rendszer** stabilitásáról képet adni. Tegyük fel először, hogy az átviteli függvénynek nincsenek jobboldali pólusai.

Ha a $G_H(i\omega)$ frekvenciafüggvény épp átmegy a komplex számsík -1 pontján, azaz

$$G_H(i\omega_0) = -1,$$

akkor ω_0 körfrekvencián a zárt rendszerben csillapítatlan lengések keletkeznek. Ekkor azt mondjuk, hogy a zárt rendszer a *stabilitás határán* van.

Állítás: Rajzoljuk meg a frekvenciafüggvényt a $-\infty < \omega < \infty$ tartományra. (A negatív frekvenciákra a függvény a pozitív frekvenciákra ismert módon levezetett függvényeknek a valós tengelyre vett tükörképe lesz.)

Ha a *felnyitott hurok* $G_H(i\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ frekvenciafüggvénye a növekvő frekvenciák irányába haladva

nem veszi körül a -1 pontot	$\rightarrow$ a *zárt rendszer* stabil
átmegy a -1 ponton	$\rightarrow$ a *zárt rendszer*
	a stabilitás határán van
körülveszi a -1 pontot	$\rightarrow$ a *zárt rendszer* instabil.

Bizonyítás: A zárt rendszer átviteli függvénye:

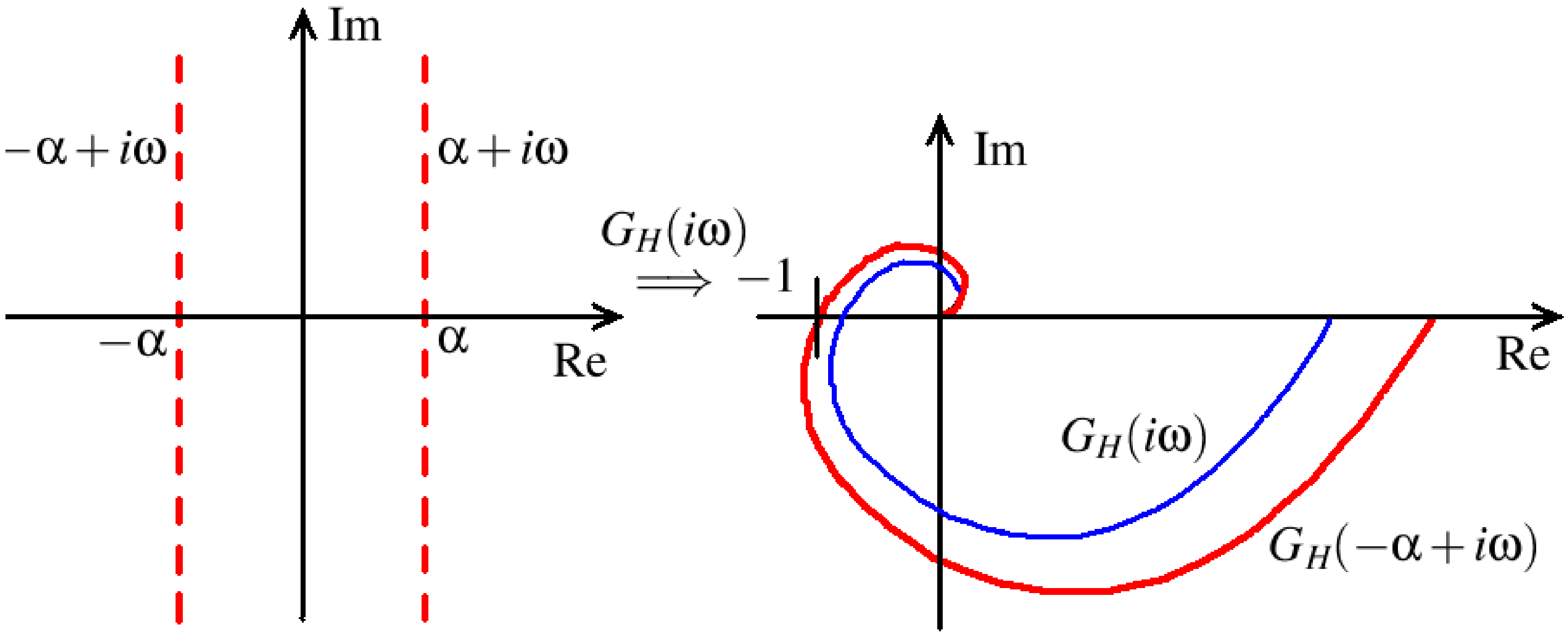
$$G_z(s) = \frac{G_H(s)}{1+G_H(s)} = \frac{b_z(s)}{a_z(s)},$$

Ennek pólusai az

$$a_z(s) = 1 + G_H(s) = 0$$

egyenlet gyökei, mely ekvivalens a $G_H(s) = -1$ egyenlettel.

$G_H(i\omega)$ frekvenciafüggvény **konform leképezést** valósít meg, melynek során a komplex számsík $i\omega$ képzetes tengelyét képezi le a teljes komplex számsík egy görbéjére.



A képzetes tengelytől balra eső, azzal párhuzamos egyenes egyenlete $-\alpha + i\omega$, a jobbra eső párhuzamos egyenes egyenlete $\alpha + i\omega$, ahol $\alpha > 0$ egy adott pozitív szám, és ω a $-\infty$ és $+\infty$ között változik.

A konform leképezés tulajdonságából (szög és aránytartás) adódóan a $-\alpha + i\omega$ egyenes $G_H(-\alpha + i\omega)$ képe $G_H(i\omega)$-tól balra, az $\alpha + i\omega$ egyenes $G_H(\alpha + i\omega)$ képe a $G_H(i\omega)$-tól jobbra lesz.

Ha tehát a $G_H(i\omega)$ a -1 ponttól jobbra metszi a valós tengelyt és nem fogja körül a -1 pontot, akkor a $G_H(s) = -1$ csak olyan s_i gyökökre teljesülhet, amelyeknek negatív valós része van, azaz $s_i = -\alpha_i + i\omega$, $\alpha_i > 0$.

Ebből következik, hogy a $G_H(s) = -1$ egyenlet minden gyökének negatív lesz a valós része, tehát a zárt rendszer *stabil*.

Hasonló érveléssel láthatjuk be, hogy ha $G_H(i\omega)$ a -1 ponttól balra metszi a valós tengelyt, akkor a $G_H(s) = -1$ egyenletnek lehetnek pozitív valós részű gyökei, amiből következik, hogy a zárt rendszer *instabil*.

A stabilitás analízist a Bode-diagram alapján is elvégezhetjük, ez az ún. *Bode-stabilitási kritérium*.

Ha a *felnyitott hurok* $G_H(i\omega)$, $0 < \omega < \infty$ frekvenciafüggvényének amplitúdó Bode diagramja

-20 dB/dek-dal metszi az $\omega(\lg)$ tengelyt: a *zárt rendszer (ZR)* stabil

-40 dB/dek-dal metszi az $\omega(\lg)$ tengelyt és $\begin{cases} \varphi(\omega_c) > -180^\circ : & \text{stabil a } ZR \\ \varphi(\omega_c) < -180^\circ : & \text{instabil a } ZR \end{cases}$

-60 dB/dek-dal metszi az $\omega(\lg)$ tengelyt: a *zárt rendszer* instabil.

A zárt szabályozási körök stabilitásával kapcsolatban bevezetjük a φ_t **fázistartalék** és a κ_t **erősítési tartalék** fogalmát.

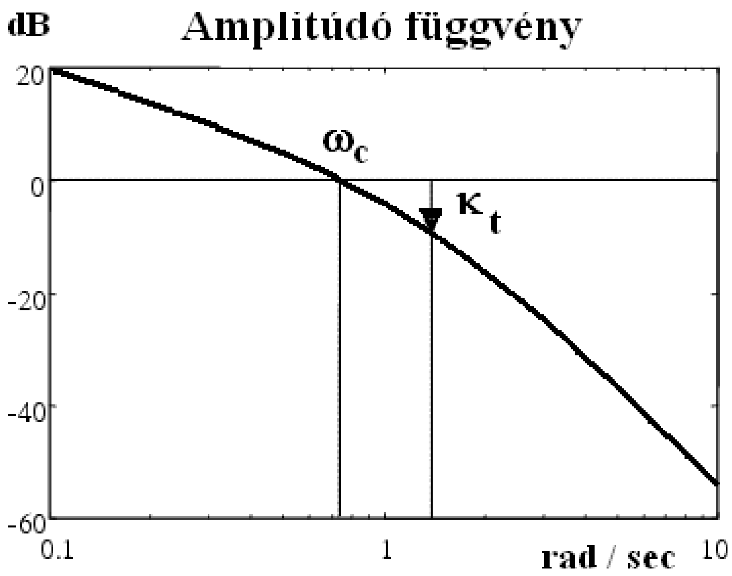
Fázistartalék:

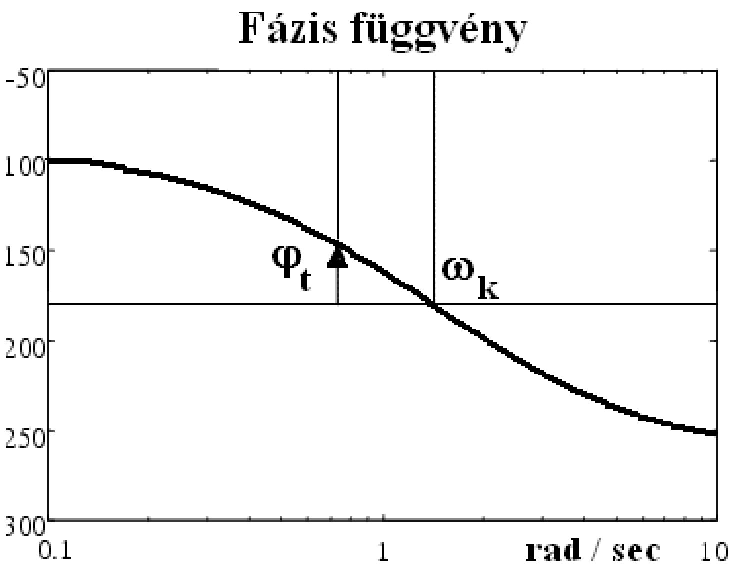
$$\varphi_t = 180^\circ + \varphi(\omega_c),$$

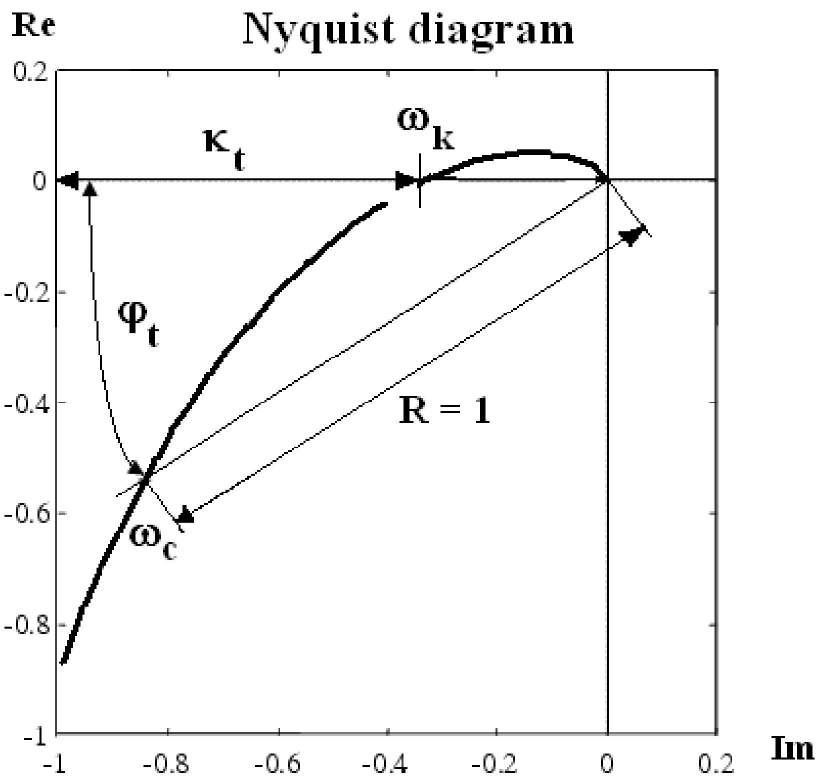
Látható, hogy $\varphi_t > 0$ ha $\varphi(\omega_c) > -180^\circ$. (lásd: ábra)

Erősítési tartalék:

A κ_t erősítési tartalék azt mutatja, hogy mennyivel tudjuk még növelni a statikus körerősítést, úgy, hogy épp a stabilitás határára kerüljön a rendszer.


dB
Amplitúdó függvény
20
0
-20
-40
-60
0.1
1
10
rad / sec
ω_c
κ_t


Fázis függvény
-50
100
150
200
250
300
0.1
1
10
rad / sec
φ_t
ω_k


Re
Nyquist diagram
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
Im
κ_t
ω_k
φ_t
R = 1
ω_c