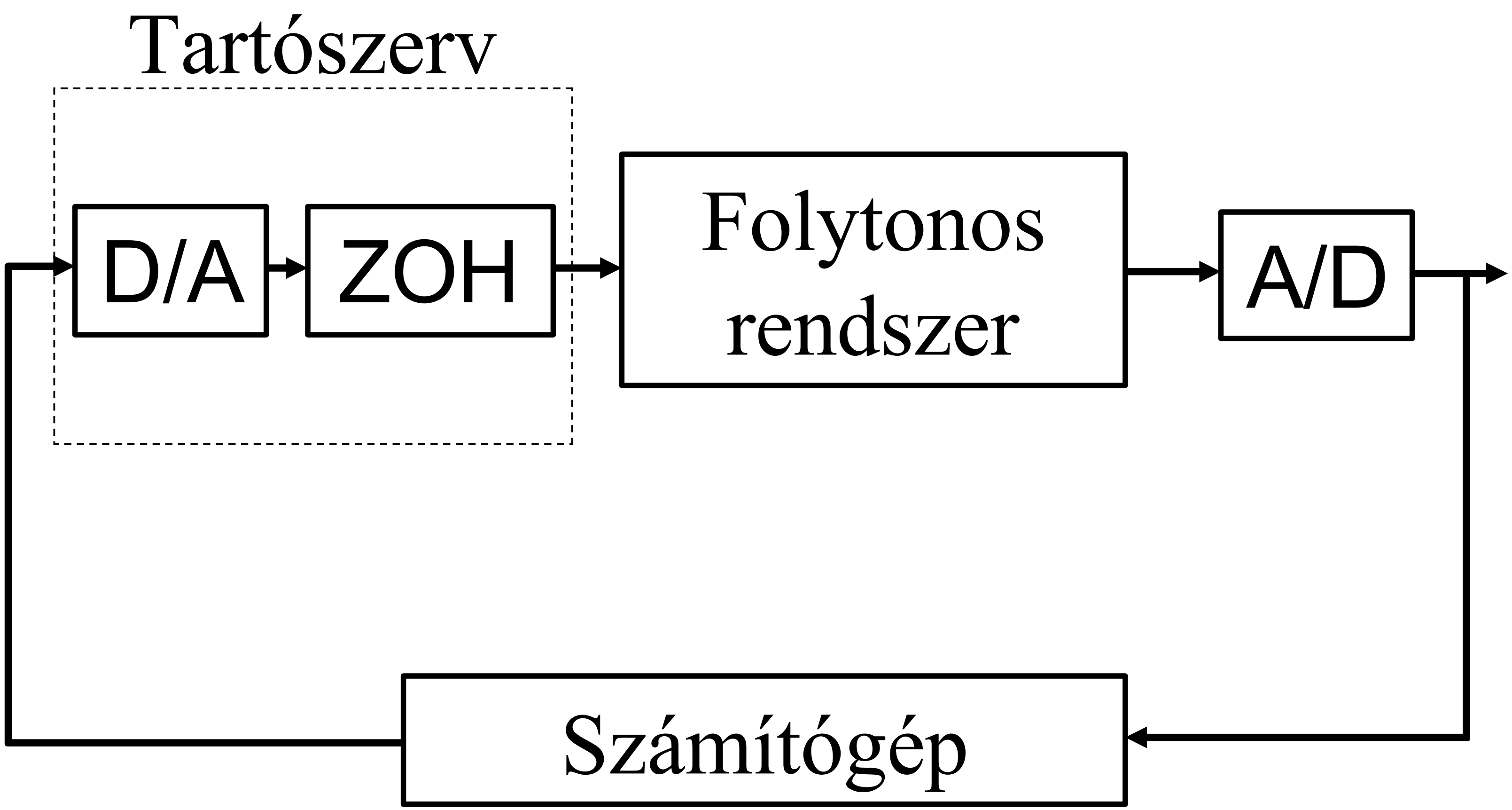
Számítógéppel irányított rendszer blokkvázlata



D/A átalakítás

A diszkrét idejű jelből kódolási eljárással folytonos idejű impulzus sorozatot állít elő, mely a D/A átalakító analóg kimenő jele.

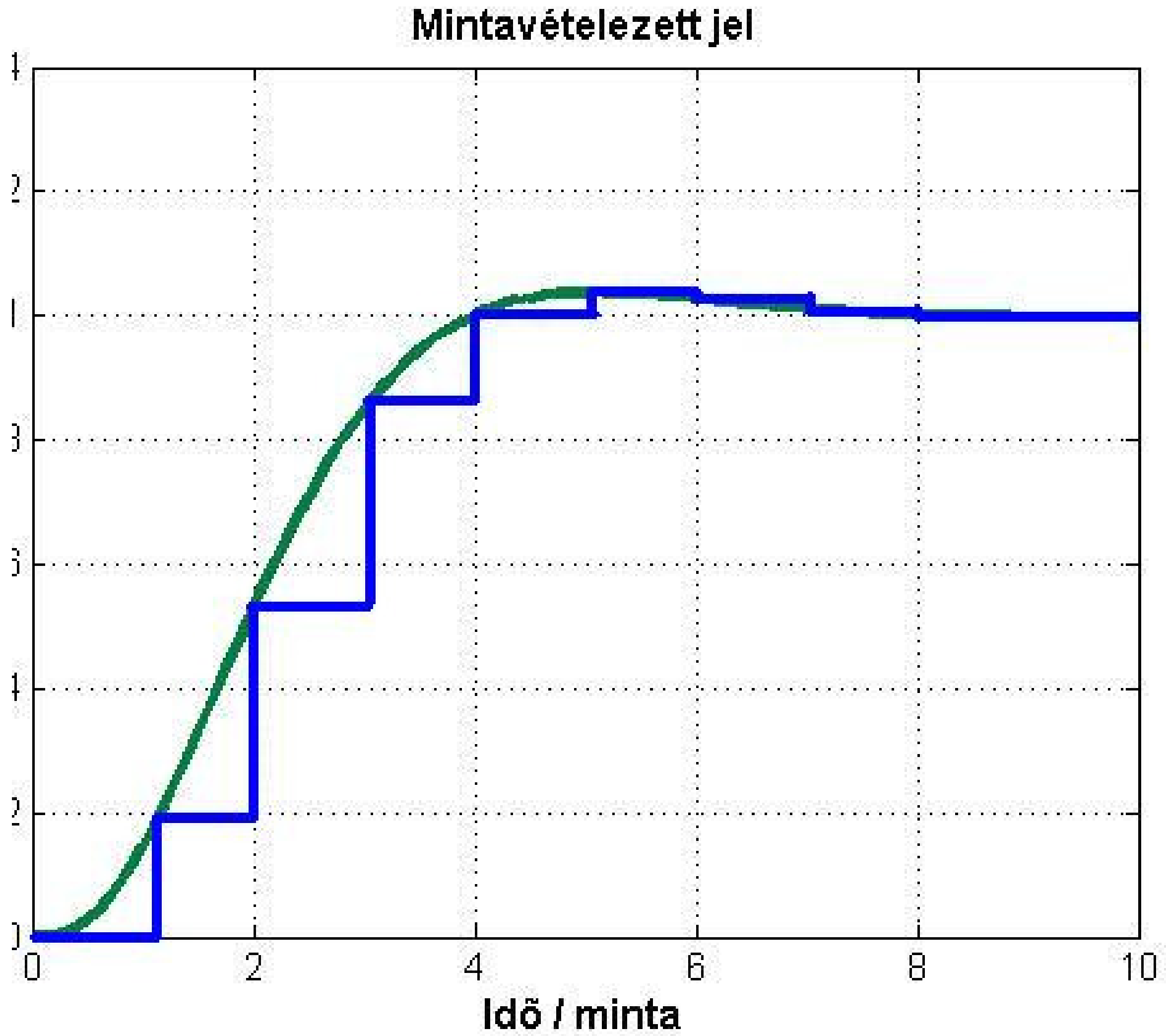
Tartószerv

A tartószerv feladata két mintavételi pont között a jel biztosítása. A D/A konverter kimenő impulzussorozatából folytonos idejű jelet biztosít. A tartószerv meghatározza, hogy két mintavételi időpont között hogyan változik a jel. A legegyszerűbb tartószerv a zérusrendű (ZOH) tarószerv, mely állandó értéken (előző kimeneti függvény érték) tartja a kimenetet, míg a a következő mintavétel sorra nem kerül.

A zérus rendű tartószerv a D/A átalakító kimenetét integrálja h mintavételi ideig. Elsőrendű tartó (FOH) a két mintavételi pont értékeinek adott meredekségű összekötését biztosítja. Léteznek magasabbrendű tartószervek, melyek törekszenek a folytonos jelalak két mintavétel közötti értékének minél tökéletesebb visszaadására.

A/D átalakítás

Az időben folytonos rendszer kimenetét diszkrét jellé alakítja kódolási eljárással. Ezt a diszkretizált, majd digitalizált jelet használjuk fel a számítógéppel irányított szabályozó bemeneteként.


Mintavételezett jel
0
2
4
6
8
10
Idõ / minta

1. Számítógéppel irányított rendszerek (bevezetés)
2. **Az egységugrásra ekvivalens diszkrét állapottér**

Egységugrásra ekvivalens, diszkrét idejű állapottér modell

Legyen adott az alábbi *folytonos idejű* állapottér reprezentáció, x_0 kezdeti értékkel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

ahol az inhomogén állapotegyenlet megoldása a következő:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\
y(t) &= c^T x(t).
\end{aligned}
$$

Diszkrét esetben

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Legyen a mintavételi idő állandó:

$$h = t_{k+1} - t_k = \text{állandó}$$

valamint feltételezzük, hogy két mintavételi idő között a bemenőjel nem változik.

Változó transzformáció

$$t_{k+1} - \tau = (t_{k+1} - t_k) + (t_k - \tau) = h - \theta$$

$$\int_0^h e^{A(h-\theta)} bu(t_k) d\theta = \left[\int_0^h e^{-A\theta} d\theta \right] e^{Ah} bu(t_k) =$$

$$= \left[-A^{-1} e^{-A\theta} \right]_0^h e^{Ah} bu(t_k) =$$

$$= \left(-A^{-1} e^{-Ah} + A^{-1} I_n \right) e^{Ah} bu(t_k)$$

Tehát a diszkrét idejű állapottér reprezentáció

$$x(t_{k+1}) = \Phi x(t_k) + \Gamma u(t_k)$$
$$y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$$

ahol

$$\Phi = e^{Ah}$$
$$\Gamma = A^{-1}\left[e^{Ah} - I_n\right] b$$

Példa

Legyen

$$G(s) = \frac{b}{s+a}.$$

Határozzuk meg az 1TP tag folytonos állapottér reprezentációját!

$$A = -a,\ \ B = b,$$

$$c^T = 1 \Updownarrow$$

$$\dot{x} = -ax + bu$$

$$y = x$$

Határozzuk meg az egységugrásra ekvivalens állapottér reprezentáció paramétermátrixait ha a mintavételi idő h!

$$\Phi = e^{-ah}$$

$$\Gamma = \frac{1}{a}\left(e^{-ah} - 1\right) b$$

$$x(t_{k+1}) = e^{-ah} x(t_k) + \frac{1}{a}\left(e^{-ah} - 1\right) b u(t_k)$$

$$y(t_k) = c^T x(t_k)$$

Példa

Legyen adott az alábbi átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Határozzuk meg a tag folytonos diagonál állapottér reprezentációját!

A folytonos rendszer pólusai a $p_1 = -2$ és $p_2 = -3$ helyeken vannak.

A residuumok:

$$r_1 = \lim_{s \to -2} (s+2)G(s) = -1$$
$$r_2 = \lim_{s \to -3} (s+3)G(s) = 2$$

És az állapottér reprezentáció,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az egységugrásra ekvivalens állapottér reprezentáció paramétermátrixait ha a mintavételi idő h!

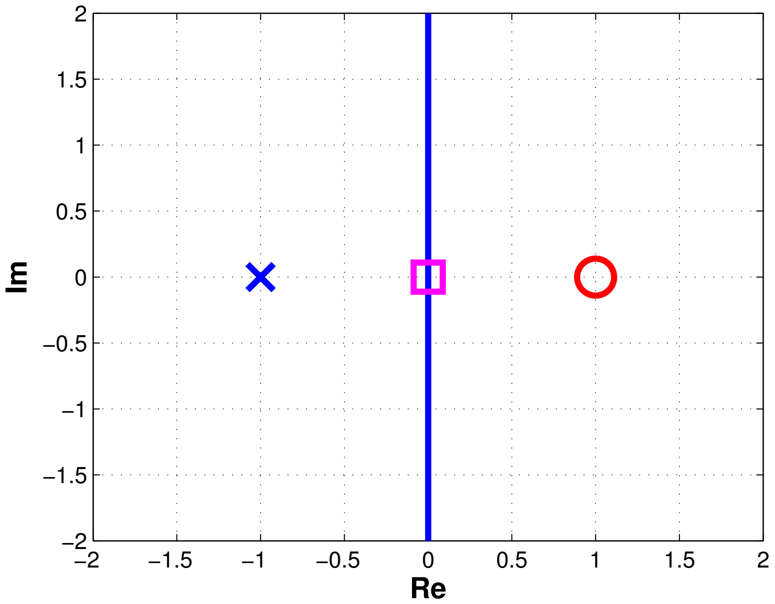
$$\Phi = e^{Ah} = \begin{bmatrix} e^{-2h} & 0 \\ 0 & e^{-3h} \end{bmatrix}$$

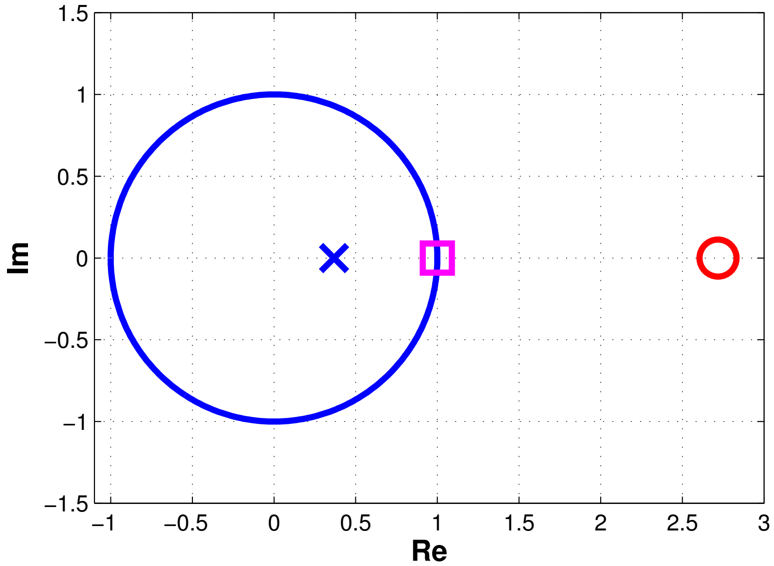
$$\Gamma = A^{-1}[e^{Ah} - I_n]b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} e^{-2h} & 0 \\ 0 & e^{-3h} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - e^{-2h} & 0 \\ 0 & 2(e^{-3h} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-2h}-1}{2} \\ \frac{2(1-e^{-3h})}{3} \end{bmatrix}$$

Diszkrét rendszerek stabilitása

$$Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1..n \quad \Leftrightarrow \quad \left| e^{\lambda_i h} \right| < 1$$





Diszkrét rendszerek megfigyelhetősége

1. Definíció. *Az* $O_n(c^T, \Phi)$ *mátrixot a diszkrét idejű rendszer megfigyelhetőségi mátrixának nevezzük.*

1. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel): *Egy* (c^T, Φ) *pár megfigyelhető akkor és csak akkor, ha megfigyelhetőségi mátrixuk rangja megegyezik az állapottér dimenziójával, azaz*

$$rang\left\{O_n(c^T, \Phi)\right\} = n,$$

ahol

$$O_n = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \Phi \\ \vdots \\ c^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

Diszkrét rendszerek irányíthatósága

2. Definíció. *Az* $\mathcal{C}_n(\Phi,\Gamma)$ *mátrixot a diszkrét idejű rendszer irányíthatósági mátrixának nevezzük.*

2. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel): *Egy* (Φ,Γ) *pár akkor és csak akkor irányítható, ha irányíthatósági mátrixuk rangja megegyezik az állapottér dimenziójával, azaz*

$$rang\left\{\mathcal{C}_n(\Phi,\Gamma)\right\} = n,$$

ahol $\mathcal{C}_n = \begin{bmatrix}\Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma\end{bmatrix}$