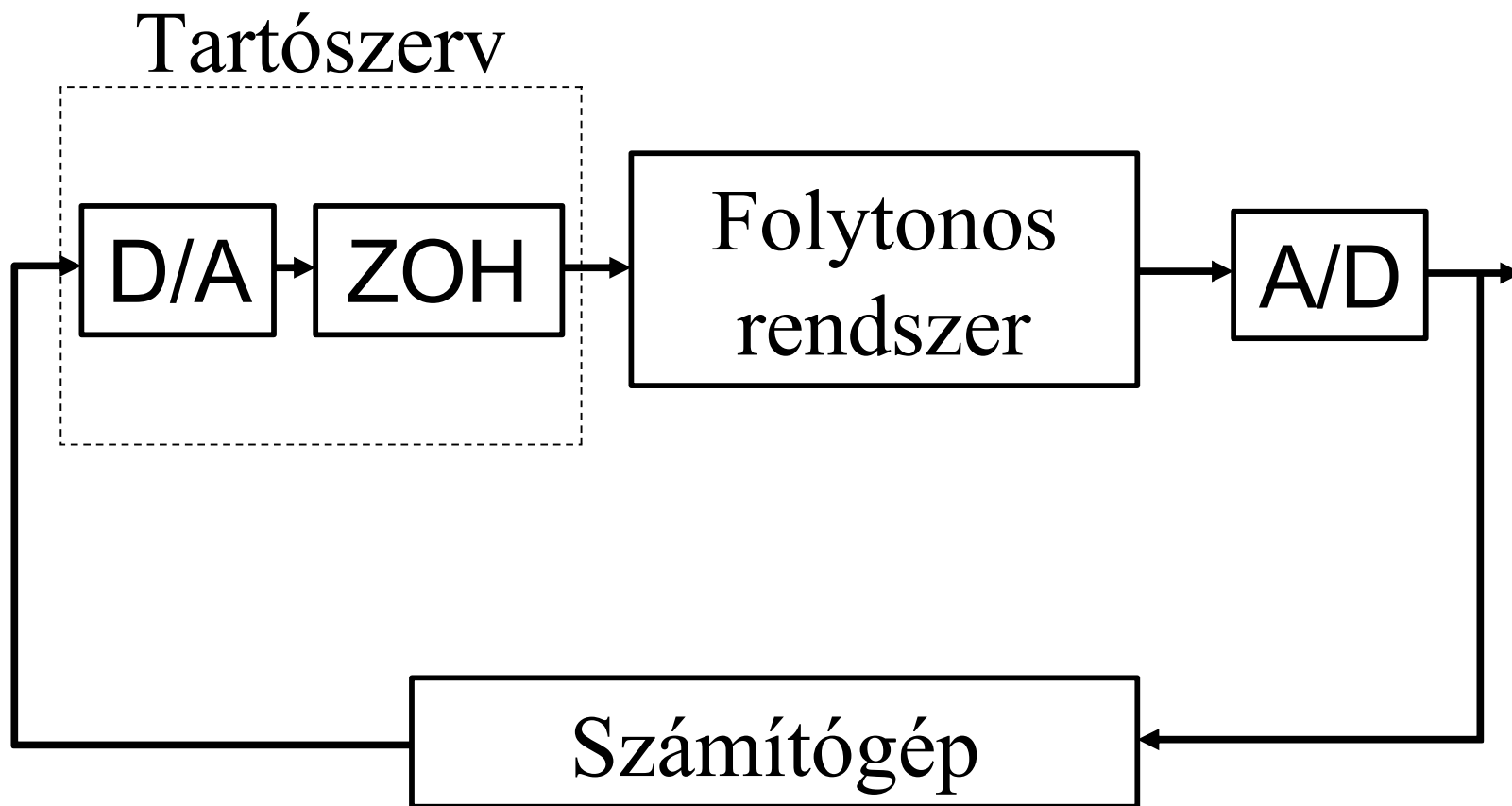


- 1. Számítógéppel irányított rendszerek**
2. Az egységugrásra ekvivalens diszkrét állapotter

## Számítógéppel irányított rendszer blokkvázlata



## **D/A átalakítás**

A diszkrét idejű jelből kódolási eljárással folytonos idejű impulzus sorozatot állít elő, mely a D/A átalakító analóg kimenő jele.

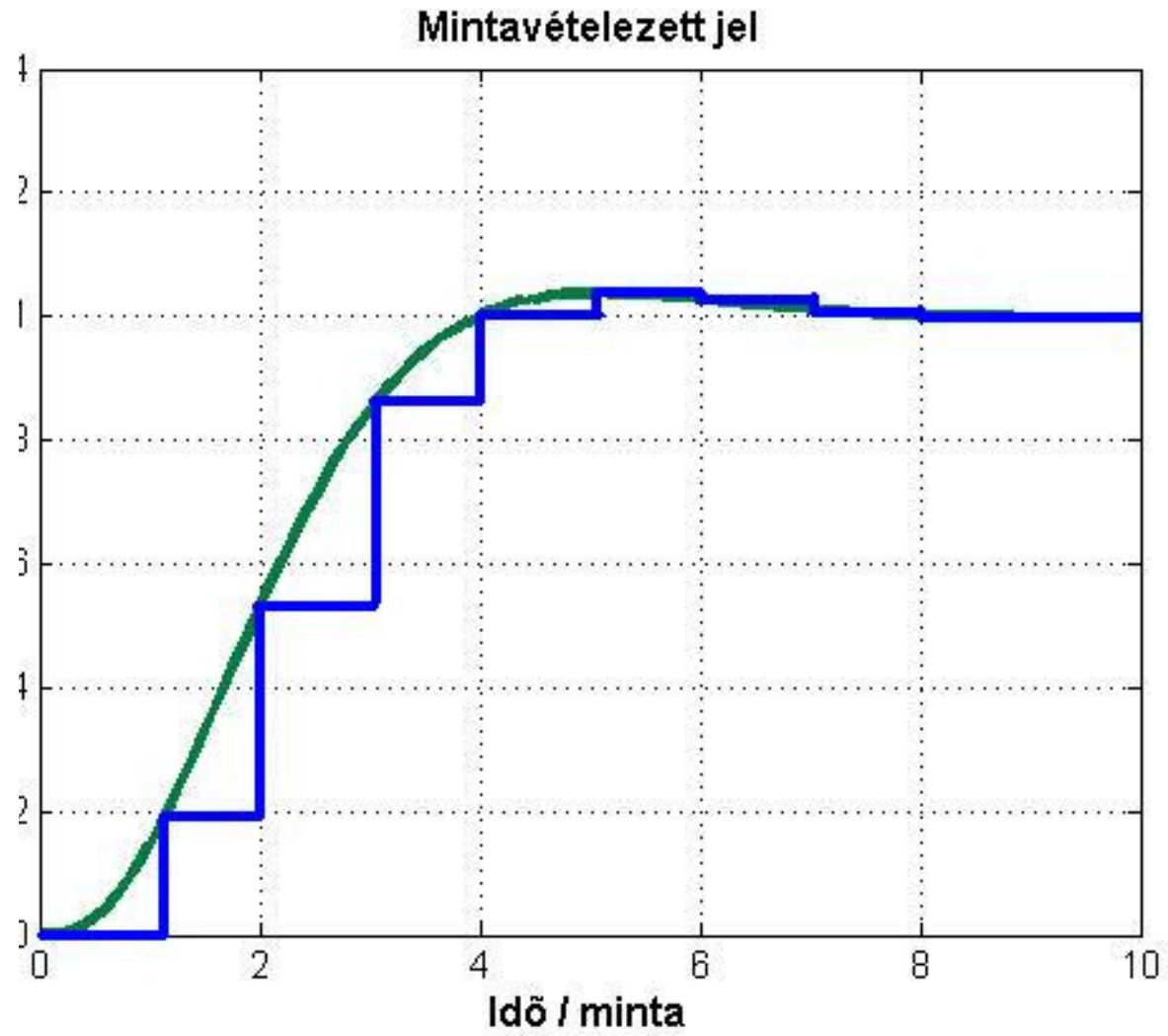
## Tartószerv

A tartószerv feladata két mintavételi pont között a jel biztosítása. A D/A konverter kimenő impulzussorozatából folytonos idejű jelet biztosít. A tartószerv meghatározza, hogy két mintavételi időpont között hogyan változik a jel. A legegyszerűbb tartószerv a zérusrendű (ZOH) tartószerv, mely állandó értéken (előző kimeneti függvény érték) tartja a kimenetet, míg a következő mintavétel sorra nem kerül.

A zérus rendű tartószerv a D/A átalakító kimenetét integrálja  $h$  mintavételi ideig. Elsőrendű tartó (FOH) a két mintavételi pont értékeinek adott meredekségű összekötését biztosítja. Léteznek magasabbrendű tartószervek, melyek törekszenek a folytonos jelalak két mintavétel közötti értékének minél tökéletesebb visszaadására.

## **A/D átalakítás**

Az időben folytonos rendszer kimenetét diszkrét jellé alakítja kódolási eljárással. Ezt a diszkrétizált, majd digitalizált jelet használjuk fel a számítógéppel irányított szabályozó bemeneteként.



1. Számítógéppel irányított rendszerek (bevezetés)
2. **Az egységugrásra ekvivalens diszkrét állapottér**



## Egységugrásra ekvivalens, diszkrét idejű állapot- tér modell

Legyen adott az alábbi *folytonos idejű* állapot-  
terezentáció,  $x_0$  kezdeti értékkel

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = c^T x$$

ahol az inhomogén állapotegyenlet megoldása a következő:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$
$$y(t) = c^T x(t).$$

*Diszkrét esetben*

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Legyen a mintavételi idő állandó:

$$h = t_{k+1} - t_k = \text{állandó}$$

valamint feltételezzük, hogy két mintavételi idő között a bemenőjel nem változik.

## Változó transzformáció

$$t_{k+1} - \tau = (t_{k+1} - t_k) + (t_k - \tau) = h - \theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^h e^{A(h-\theta)} bu(t_k) d\theta &= \left[ \int_0^h e^{-A\theta} d\theta \right] e^{Ah} bu(t_k) = \\ &= \left[ -A^{-1} e^{-A\theta} \right]_0^h e^{Ah} bu(t_k) = \\ &= \left( -A^{-1} e^{-Ah} + A^{-1} I_n \right) e^{Ah} bu(t_k) \end{aligned}$$

Tehát a diszkrét idejű állapotter reprezentáció

$$x(t_{k+1}) = \Phi x(t_k) + \Gamma u(t_k)$$

$$y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$$

ahol

$$\Phi = e^{Ah}$$

$$\Gamma = A^{-1} [e^{Ah} - I_n] b$$

## Példa

Legyen

$$G(s) = \frac{b}{s + a}.$$

Határozzuk meg az 1TP tag folytonos állapotér reprezentációját!

$$A = -a, B = b,$$

$$c^T = 1 \Updownarrow$$

$$\dot{x} = -ax + bu$$

$$y = x$$

Határozzuk meg az egységugrásra ekvivalens állapot-  
tér reprezentáció paramétermátrixait ha a mintavételi  
idő  $h$ !

$$\Phi = e^{-ah}$$

$$\Gamma = \frac{1}{a} (e^{-ah} - 1) b$$

$$x(t_{k+1}) = e^{-ah} x(t_k) + \frac{1}{a} (e^{-ah} - 1) bu(t_k)$$
$$y(t_k) = c^T x(t_k)$$



## Példa

Legyen adott az alábbi átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)}$$

Határozzuk meg a tag folytonos diagonál állapotér reprezentációját!

A folytonos rendszer pólusai a  $p_1 = -2$  és  $p_2 = -3$  helyeken vannak.

A residuumok:

$$r_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)G(s) = -1$$

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s + 3)G(s) = 2$$

És az állapotter reprezentáció,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

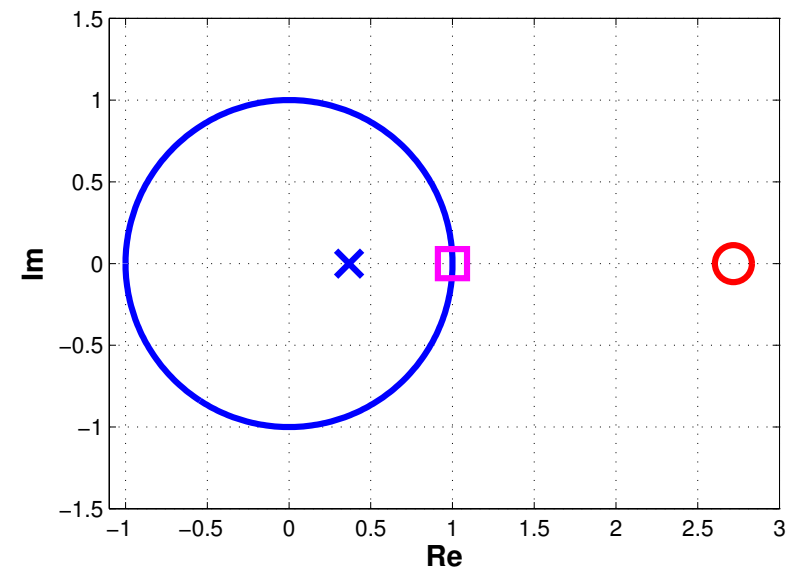
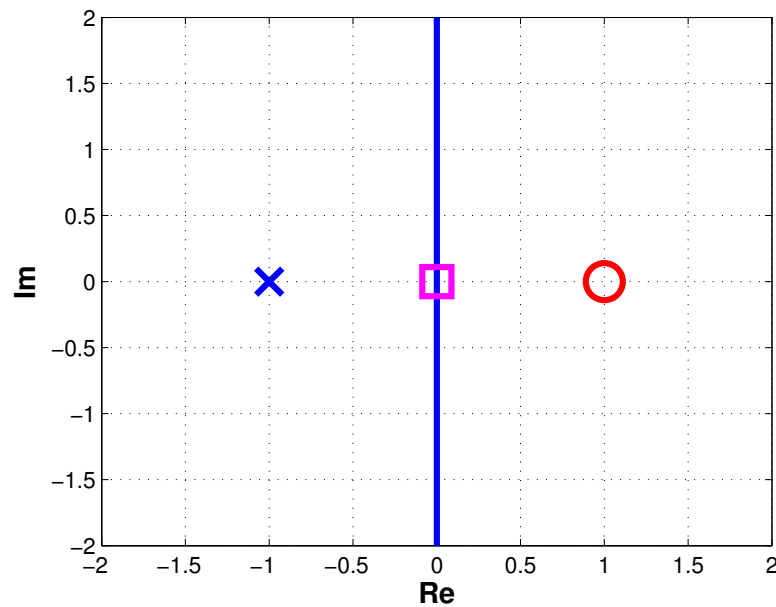
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az egységugrásra ekvivalens állapotter reprezentáció paramétermátrixait ha a mintavételi idő  $h$ !

$$\begin{aligned} \Phi = e^{Ah} &= \begin{bmatrix} e^{-2h} & 0 \\ 0 & e^{-3h} \end{bmatrix} \\ \Gamma = A^{-1}[e^{Ah} - I_n]b &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} e^{-2h} & 0 \\ 0 & e^{-3h} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - e^{-2h} & 0 \\ 0 & 2(e^{-3h} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-2h} - 1}{2} \\ \frac{2(1 - e^{-3h})}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Diszkrét rendszerek stabilitása

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1..n \quad \Leftrightarrow \quad \left| e^{\lambda_i h} \right| < 1$$



## Diszkrét rendszerek megfigyelhetősége

**1. Definíció.** Az  $O_n(c^T, \Phi)$  mátrixot a diszkrét idejű rendszer megfigyelhetőségi mátrixának nevezzük.

**1. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel):** Egy  $(c^T, \Phi)$  pár megfigyelhető akkor és csak akkor, ha megfigyelhetőségi mátrixuk rangja megegyezik az állapotér dimenziójával, azaz

$$\text{rang} \{ O_n(c^T, \Phi) \} = n,$$

*ahol*

$$O_n = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \Phi \\ \vdots \\ c^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

## Diszkrét rendszerek irányíthatósága

**2. Definíció.** Az  $C_n(\Phi, \Gamma)$  mátrixot a diszkrét idejű rendszer irányíthatósági mátrixának nevezzük.

**2. Állítás (Kálmán-féle rangfeltétel):** Egy  $(\Phi, \Gamma)$  pár akkor és csak akkor irányítható, ha irányíthatósági mátrixuk rangja megegyezik az állapotter dimenziójával, azaz

$$\text{rang} \{C_n(\Phi, \Gamma)\} = n,$$

$$\text{ahol } C_n = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}$$