Irányítástechnika II.
előadásvázlat

Dr. Bokor József

egyetemi tanár, az MTA rendes tagja

BME Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

Irányítástechnika II. féléves tárgytematika

Az irányításelmélet alapfogalmai

Rendszerek időtartományi és frekvencia tartományi vizsgálata

Stabilitáselmélet (stabilitás feltételei, zárt és visszacsatolt rendszerek stabilitása)

Zárt szabályozási körök minőségi jellemzői

Soros kompenzálás

Robusztus stabilitás

Bevezetés az állapottér-elméletbe (állapottér reprezentációk, transzformációk)

Állapottér reprezentációk tulajdonságai, állapotegyenletek megoldása

Állapot visszacsatolás

Állapotmegfigyelő tervezése

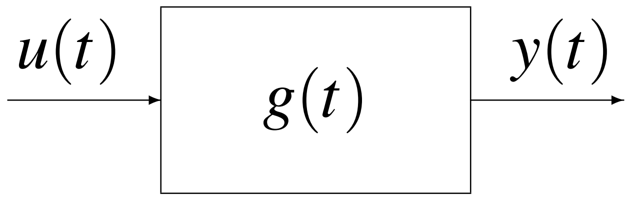
1. **Irányításelmélet alapfogalmai**
   - linearitás, időinvariancia, kauzalitás, stabilitás, visszacsatolás
   - szabályozási feladat hatásvázlata
2. Lineáris időinvariáns rendszerek modelljei
   - időtartományi leírás: differenciálegyenlet és súlyfüggvény
   - átviteli függvény
   - frekvencia függvények

Az **irányítástechnika** célja, hogy adott rendszerek viselkedését általunk kívánt tulajdonságúvá, ill. adott szempontok és célok szerint *optimálissá* tegye.

Rendszereknek általánosan az olyan absztrakt objektumokat nevezhetjük, amelyek az őket érő külső, környezetükből jövő hatásokra valamilyen válaszreakciót generálnak.

Másképpen: ha egy rendszert külső, ún. *bemenő jelekkel* gerjesztünk, az válaszjeleket generál, amiket az irányításelméletben *kimenő jeleknek* nevezünk.

A rendszert egy blokkal szemléltetjük, a bemenőjel $u(t)$, a rendszer által generált válasz $y(t)$.



A bemenet-kimenet kapcsolatot jellemző fontos **rendszertulajdonságok**:

- *linearitás*,
- *időinvariancia*,
- *kauzalitás*.

Linearitás: A rendszer működésére érvényes a szuperpozíció elve. A rendszert lineárisnak nevezzük, ha a rendszer u_1 bemenetre y_1 választ, u_2 bemenetre y_2 választ és

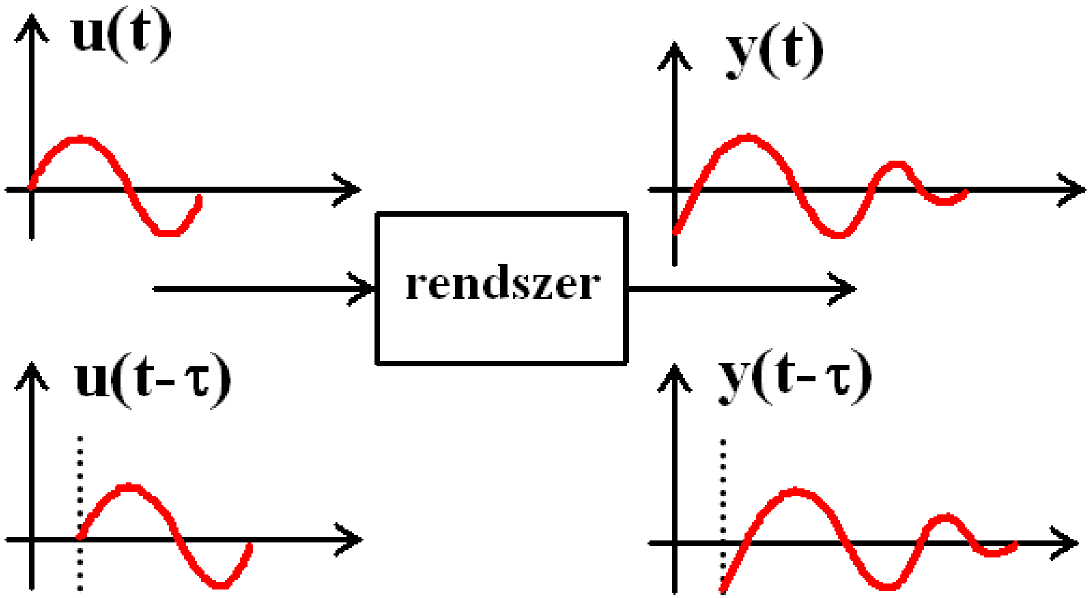
$$u = \alpha * u_1 + \beta * u_2$$

bemenetre

$$y = \alpha * y_1 + \beta * y_2$$

választ generál.

Időinvariancia: Egy bemenőjelre adott válasz nem függ a bemenőjel alkalmazásának az időpontjától.



Ha a rendszer időinvariáns, akkor egy τ időponttal késleltetett impulzusra ugyanazt a válaszfüggvényt adja τ időbeli eltolással.

Kauzalitás: A generált kimenőjel egy adott időpontban nem függ a bemenőjel jövőjétől. Ha a kimenőjel csak a bemenőjel múltjától függ, akkor a rendszert *szigorúan kauzálisnak* nevezzük.

Stabilitás: Stabilis rendszerek korlátos (Bounded) bemenőjelekre korlátos kimenőjellel válaszolnak. Az ilyen tulajdonsággal bíró rendszereket *bemenet - kimenet stabilisnak* nevezzük (angolul Bounded Input - Bounded Output: BIBO stabilisnak).

Visszacsatolás: Alkalmazásával meg tudjuk változtatni egy *rendszer tulajdonságait*, ill. ennek alapján *speciális feladatok* megoldására tehetjük azt alkalmassá.

A visszacsatolás segítségével meg tudjuk változtatni bizonyos rendszerek alapvető *tulajdonságait*:

- **stabilizálhatunk** instabil rendszereket,
- **linearizálhatunk** nemlineáris rendszereket,
- **robusztussá** tehetünk bizonytalansággal terhelt rendszereket: bizonyos irányítási rendszerek érzéketlenné tehetők a rendszer pontatlan ismeretéből vagy a szükségszerű elhanyagolásokból adódó bizonytalanságokkal szemben.

A megoldandó *speciális feladatok* az alábbiak lehetnek:

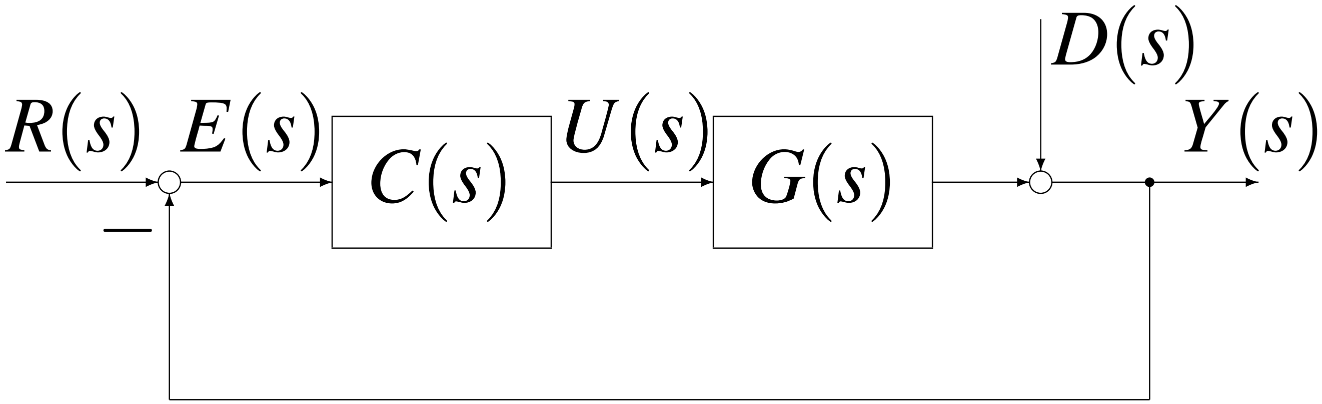
- **értéktartó szabályozás**: Adott jellemző, jel adott értéken tartása (pl. hőmérséklet, vízszint, autó sebessége), miközben a környezeti hatások változnak.

- **követő szabályozás**: Adott jellemző, jel előírt módon való időbeli változtatása (pl. gépkocsi útkövetése, robotkar adott pályán való mozgatása).

- **zavarkompenzáció vagy zavarelhárítás**: A rendszer viselkedését kedvezőtlenül befolyásoló zavarás hatásának csökkentése. Ilyen pl. az útgerjesztés által okozott rezgések csökkentése az utastérben.

Irányítási hatásvázlat készítése:

1. szabályozni kívánt jellemző és szabályozási cél meghatározása
2. mérhető jelek meghatározása a visszacsatoláshoz
3. alapjel beállítása, majd különbségképzés
4. rendelkező jel átalakítása, *beavatkozó* jel generálása



$C(s)$ a szabályozó

$G(s)$ a szabályozott rendszer

$R(s)$ a referenciajel (vagy alapjel)

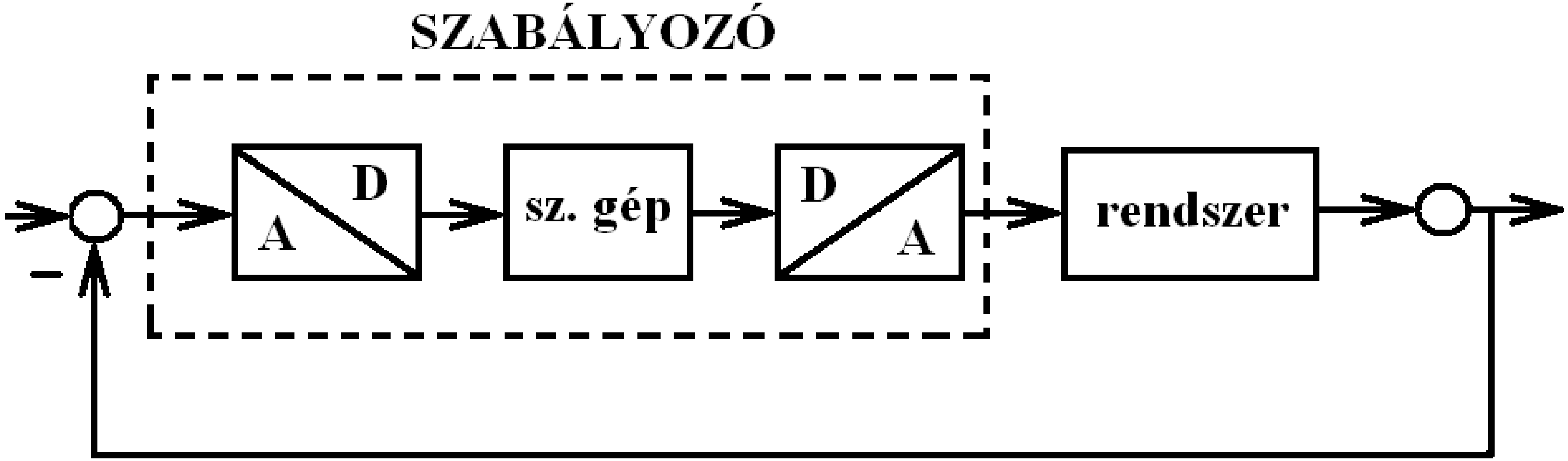
$E(s)$ a hibajel (vagy rendelkezőjel)

$U(s)$ a beavatkozó jel (control input)

$D(s)$ a zavaró jel

$Y(s)$ a szabályozott jellemző (kimenet)

Számítógépes irányítórendszer felépítése: Analóg/digitális (A/D) jelátalakítót, az irányítási algoritmust megvalósító számítógépet, digitális/analóg (D/A) átalakítót, és ún. tartószervet tartalmaz.



Analízis: Modell alapján a rendszer tulajdonságok vizsgálata.

Szintézis: Modell alapján a megadott kritériumok figyelembevételével a zárt hurkú irányítás megtervezése.

1. Irányításelmélet alapfogalmai
   - linearitás, időinvariancia, kauzalitás, stabilitás, visszacsatolás
   - szabályozási feladat hatásvázlata
2. **Lineáris időinvariáns rendszerek modelljei**
   - időtartományi leírás: differenciálegyenlet és súlyfüggvény
   - átviteli függvény
   - frekvencia függvények

Lineáris, állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenletek:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i}\,|_{t=0} = y^i(0), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{d^j u(t)}{d^j(t)}\,|_{t=0} = u^j(0), \quad j = 1, \ldots, m.$$

$a_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad , b_j, \quad j = 1, \ldots, m$

együtthatók konstansok, nem függnek az időtől.

A bemenőjel-kimenőjel kapcsolatot leírhatjuk egy tipikus, ún. Dirac-delta függvényre adott válaszfüggvénnyel is.

A Dirac-delta függvény pontos matematikai definíciója:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{ha} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ha} \quad t \neq 0. \end{cases}$$

A Dirac-delta függvény definíciója a mérnöki gyakorlatban:

$$\text{vagy} \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ha} \quad t \neq 0. \end{cases}$$

A Dirac-delta bemenőjelre adott válaszfüggvényt a rendszer **súlyfüggvényének** nevezzük.

A súlyfüggvény segítségével egy tetszőleges bemenőjelre adott válaszfüggvény az alábbi **konvolúciós integrállal** számítható:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Az átviteli függvényt a differenciálegyenletből kiindulva a *Laplace-transzformáció* alkalmazásával vezethetjük be.

Jelölje egy $f(t)$ függvény $\mathcal{L}$-transzformáltját $F(s)$, azaz

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Vegyük a differenciálegyenlet $\mathcal{L}$ - transzformáltját zérus kezdeti feltételekkel. Ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \ldots b_1 s + b_0) U(s)$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}.$$

A $G(s)$ racionális törtfüggvényt $(m \leq n)$ a rendszer **átviteli függvényének** nevezzük. Az átviteli függvény tehát a kimenőjel és a bemenőjel zérus kezdeti feltételekkel vett $\mathcal{L}$ - transzformáltjainak hányadosa.

Az átviteli függvény alapján definiáljuk a lineáris idő-invariáns dinamikus rendszerek *zérusait* és *pólusait*.

A $b(s) = 0$ egyenlet z_j $(j = 1, \ldots, m)$ gyökeit a rendszer **zérusainak**,

$a(s) = 0$ egyenlet p_i $(i = 1, \ldots, n)$ gyökeit pedig a rendszer **pólusainak** nevezzük.

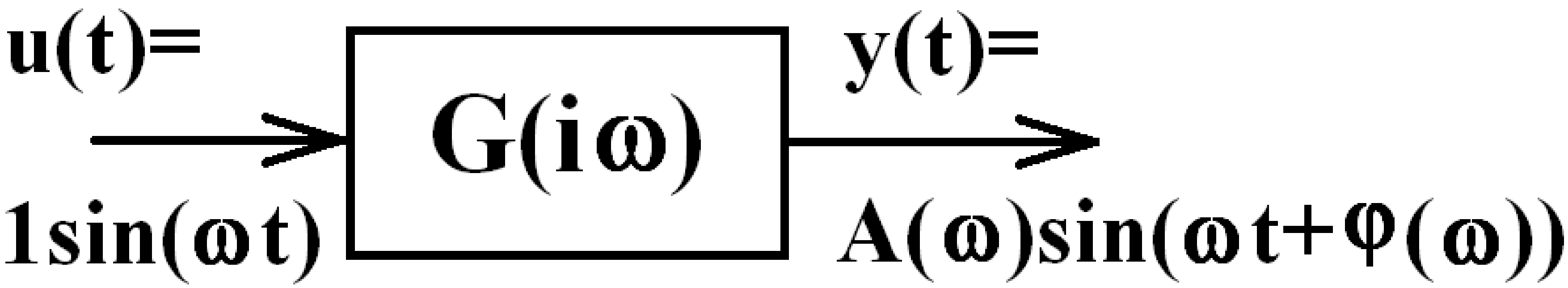
Az átviteli függvényt felírhatjuk ún. zérus - pólus alakban:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}, \qquad k = \frac{b_m}{a_n}$$

A $\mathcal{L}$ - transzformáció azon tulajdonságát felhasználva hogy az időfüggvények konvolúciójának $\mathcal{L}$ - transzformáltja a $\mathcal{L}$ - transzformáltak szorzata, a súlyfüggvény és az átviteli függvény kapcsolata:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Egy rendszer **frekvenciafüggvényének** a rendszernek egységamplitúdójú szinuszos bemenőjelre, állandósult állapotban adott válaszfüggvényét nevezzük.



Itt a bemenőjel egy egységnyi amplitúdójú szinusz lefutású jel, amelynek körfrekvenciája ω.

Legyen egy rendszer $G(s)$ átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{b}{s+a}.$$

A szinuszos jel $\mathcal{L}$-transzformáltját alkalmazva vizsgáljuk meg, hogy mi lesz a rendszer kimenőjele.

A reziduum tétel felhasználásával írhatjuk:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{s+a} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \lim_{s \to -a}(s+a)\frac{b\omega}{(s+a)(s^2+\omega^2)}e^{st}$$
$$+ \lim_{s \to -i\omega}(s+i\omega)\frac{b\omega}{(s+a)(s+i\omega)(s-i\omega)}e^{st}$$
$$+ \lim_{s \to i\omega}(s-i\omega)\frac{b\omega}{(s+a)(s+i\omega)(s-i\omega)}e^{st}$$

Elvégezve a megfelelő határérték képzéseket:

$$y(t) = \frac{b\omega}{a^2+\omega^2}\left(e^{-at} + \frac{a+i\omega}{-2i\omega}e^{-i\omega\, t} + \frac{a-i\omega}{2i\omega}e^{i\omega\, t}\right)$$

Írjuk át a $\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2}$ komplex számot exponenciális alakba:

$$\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-i\;\varphi(\omega)}, \quad \text{ahol} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a},$$

majd felhasználva az Euler - összefüggést az állandósult állapotra azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = A(\omega)\sin(\omega\, t + \varphi(\omega)), \quad \text{ahol} \quad A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2+\omega^2}}.$$

Az $A(\omega)$ függvényt **amplitúdó függvénynek**, a bemenőjel és a kimenőjel közötti fáziseltolást jelentő $\varphi(\omega)$ függvényt pedig **fázisfüggvénynek** nevezzük, mindkettő a bemenőjel ω körfrekvenciájától függ.

Látható továbbá, hogy az amplitúdó függvény a $G(s)$ átviteli függvényből az $s = i\omega$ helyettesítés után mint a $G(i\omega)$ függvény abszolút értéke,

$$A(\omega) = \mid G(i\omega) \mid = \mid ReG(i\omega) + iImG(i\omega) \mid =$$
$$= \sqrt{Re^2G(i\omega) + Im^2G(i\omega)}$$

a fázisfüggvény pedig mint a $G(i\omega)$ fázisfüggvénye kapható:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{ImG(i\omega)}{ReG(i\omega)}\right).$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\tilde{u}(t) = e^{i\omega\, t}, \quad \tilde{y}(t) = A(\omega)e^{i(\omega\, t+\varphi(\omega))}.$$

Látható, hogy a tényleges bemenő és kimenő jelek az $\tilde{u}(t)$ és $\tilde{y}(t)$ jelek imaginárius részei, így ezeket az $\tilde{u}(t)$ és $\tilde{y}(t)$ jelek lineáris transzformációjával kaphatjuk vissza. Felhasználva, hogy

$$\frac{d^l\tilde{u}(t)}{dt^l} = (i\omega)^l\tilde{u}(t), \quad l = 1,\ldots,m,$$

$$\frac{d^k\tilde{y}(t)}{dt^k} = (i\omega)^k\tilde{y}(t), \quad k = 1,\ldots,n.$$

Ezeket a differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$a(i\omega)\tilde{y}(t) = b(i\omega)\tilde{u}(t)$$

$$\begin{aligned}\big(a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(i\omega) + a_0\big)\tilde{y}(t) = \\ \big(b_m(i\omega)^m + \ldots + b_1(i\omega) + b_0\big)\tilde{u}(t)\end{aligned}$$

Mindkét oldalon vehetjük a képzetes részeket, és felhasználva a frekvenciafüggvény definícióját kapjuk, hogy

$$A(\omega) = \mid G(i\omega) \mid = \left| \frac{b(i\omega)}{a(i\omega)} \right|, \quad \varphi(\omega) = \arg G(i\omega).$$

A $G(i\omega)$ függvényeket a rendszer **frekvenciafüggvényének** nevezzük és az ω körfrekvencia szerint ábrázoljuk.

A frekvenciafüggvény ábrázolásának egyik módja az, amikor az amplitúdó függvényt mint vektort egy polár koordináta rendszerben ábrázoljuk a hozzátartozó $\varphi(\omega)$ függvény segítségével, ahol az $A(\omega)$ hosszúságú vektornak a pozitív valós tengellyel bezárt szöge éppen a $\varphi(\omega)$ szög.

A frekvenciafüggvénynek ezt az ábrázolásmódját **Nyquist-diagramnak** nevezzük.

A frekvenciafüggvények egy másik ábrázolásmódja az, amikor az $A(\omega)$ amplitúdó függvényt az ω (lg) függvényében ábrázoljuk, decibelben. Ennek alapján a függőleges tengelyen $|\,G(i\omega)\,|\,\mathrm{dB} = 20\log A(\omega)$ szerepel. Ebben az esetben a $\varphi(\omega)$ fázisfüggvényt külön diagramban, a ω (lg) függvényében ábrázoljuk fokban.

Ezt az ábrázolást a rendszer **Bode-diagramjának** nevezzük.