Irányítástechnika II.
előadásvázlat

Dr. Bokor József

egyetemi tanár, az MTA rendes tagja

BME Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

Irányítástechnika II. féléves tárgytematika

Az irányításelmélet alapfogalmai

Rendszerek idő- és frekvenciatartománybeli vizsgálata

Stabilitáselmélet (stabilitás feltételei, zárt és visszacsatolt rendszerek stabilitása)

Zárt szabályozási körök minőségi jellemzői

Soros kompenzálás

Robusztus stabilitás

Bevezetés az állapottér-elméletbe (állapottér reprezentációk, transzformációk)

Állapottér reprezentációk tulajdonságai, állapotegyenletek megoldása

Állapot visszacsatolás

Állapotmegfigyelő tervezése

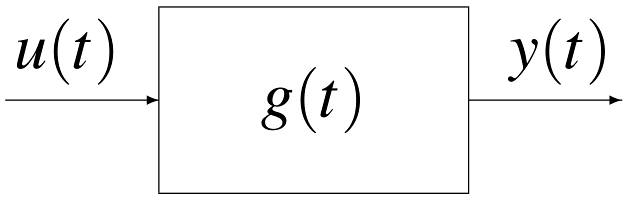
1. **Irányításelmélet alapfogalmai**
   - linearitás, időinvariancia, kauzalitás, stabilitás, visszacsatolás
   - szabályozási feladat hatásvázlata
2. Lineáris időinvariáns rendszerek modelljei
   - időtartományi leírás: differenciálegyenlet és súlyfüggvény
   - átviteli függvény
   - frekvenciafüggvények

Az **irányítástechnika** célja, hogy adott rendszerek viselkedését általunk kívánt tulajdonságúvá, ill. adott szempontok és célok szerint *optimálissá* tegye.

Rendszereknek általánosan az olyan absztrakt objektumokat nevezhetjük, amelyek az őket érő külső, környezetükből jövő hatásokra valamilyen válaszreakciót generálnak.

Másképpen: ha egy rendszert külső, ún. *bemenő jelekkel* gerjesztünk, az válaszjeleket generál, amiket az irányításelméletben *kimenő jeleknek* nevezünk.

A rendszert egy blokkal szemléltetjük, a bemenőjel $u(t)$, a rendszer által generált válasz $y(t)$.



A bemenet-kimenet kapcsolatot jellemző fontos **rendszertulajdonságok**:

- *linearitás*,
- *időinvariancia*,
- *kauzalitás*.

Linearitás: A rendszer működésére érvényes a szuperpozíció elve. A rendszert lineárisnak nevezzük, ha a rendszer u_1 bemenetre y_1 választ, u_2 bemenetre y_2 választ és

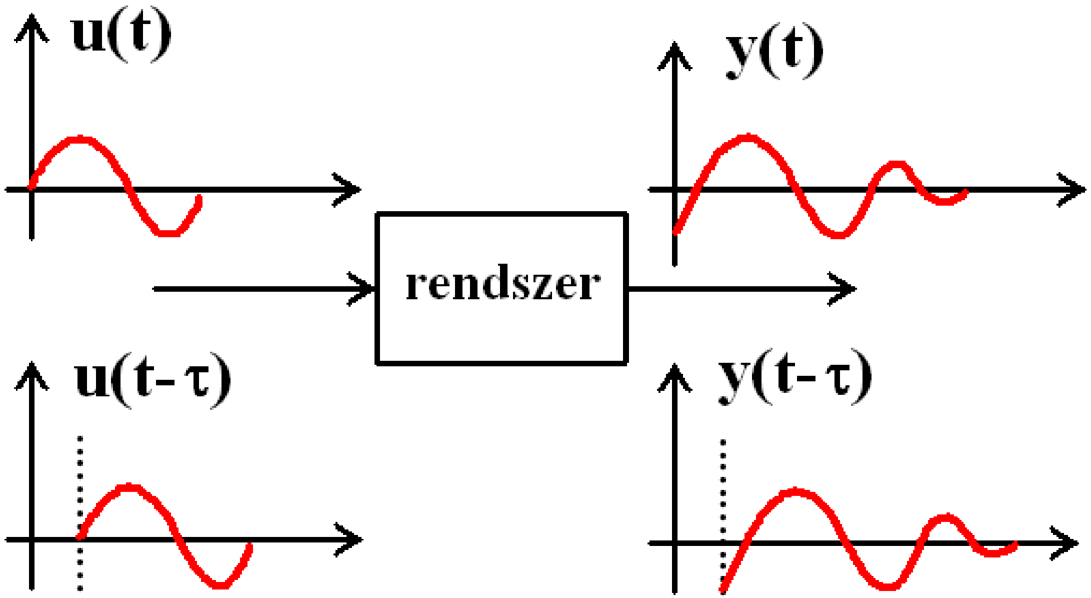
$$u = \alpha * u_1 + \beta * u_2$$

bemenetre

$$y = \alpha * y_1 + \beta * y_2$$

választ generál.

Időinvariancia: Egy bemenőjelre adott válasz nem függ a bemenőjel alkalmazásának az időpontjától.



Ha a rendszer időinvariáns, akkor egy τ időponttal késleltetett impulzusra ugyanazt a válaszfüggvényt adja τ időbeli eltolással.

Kauzalitás: A generált kimenőjel egy adott időpontban nem függ a bemenőjel jövőjétől. Ha a kimenőjel csak a bemenőjel múltjától függ, akkor a rendszert *szigorúan kauzálisnak* nevezzük.

Stabilitás: Stabilis rendszerek korlátos bemenőjelekre korlátos kimenőjellel válaszolnak. Az ilyen tulajdonsággal bíró rendszereket *bemenet - kimenet stabilisnak* nevezzük (angolul Bounded Input - Bounded Output: BIBO stabilisnak).

Visszacsatolás: Alkalmazásával meg tudjuk változtatni egy *rendszer tulajdonságait*, ill. ennek alapján *speciális feladatok* megoldására tehetjük azt alkalmassá.

A visszacsatolás segítségével meg tudjuk változtatni bizonyos rendszerek alapvető *tulajdonságait*:

- **stabilizálhatunk** instabil rendszereket,
- **linearizálhatunk** nemlineáris rendszereket,
- **robusztussá** tehetünk bizonytalansággal terhelt rendszereket: bizonyos irányítási rendszerek érzéketlenné tehetők a rendszer pontatlan ismeretéből vagy a szükségszerű elhanyagolásokból adódó bizonytalanságokkal szemben.

A megoldandó *speciális feladatok* az alábbiak lehetnek:

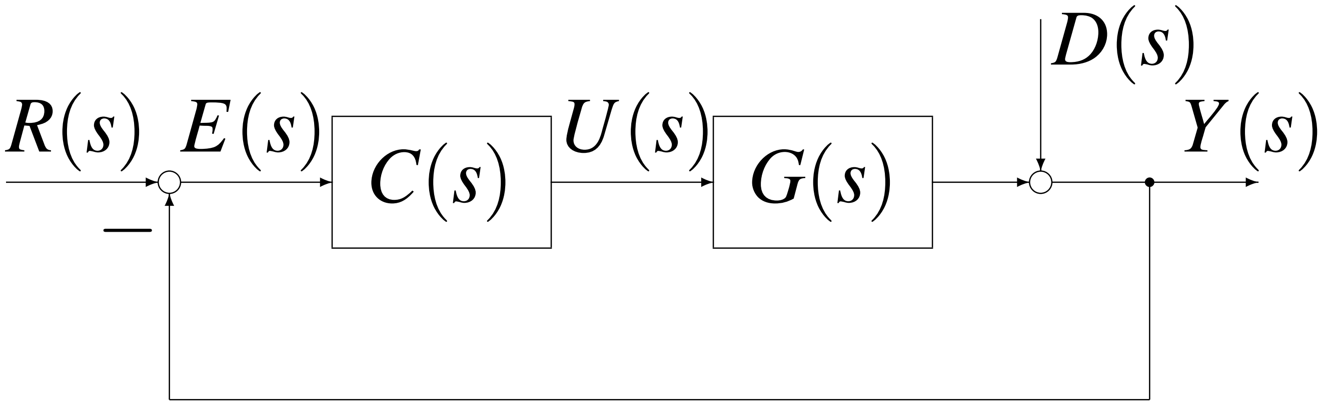
- **értéktartó szabályozás**: Adott jellemző, jel adott értéken tartása (pl. hőmérséklet, vízszint, autó sebessége), miközben a környezeti hatások változnak.

- **követő szabályozás**: Adott jellemző, jel előírt módon való időbeli változtatása (pl. gépkocsi útkövetése, robotkar adott pályán való mozgatása).

- **zavarkompenzáció vagy zavarelhárítás**: A rendszer viselkedését kedvezőtlenül befolyásoló zavarás hatásának csökkentése. Ilyen pl. az útgerjesztés által okozott rezgések csökkentése az utastérben.

Irányítási hatásvázlat készítése:

1. szabályozni kívánt jellemző és szabályozási cél meghatározása
2. mérhető jelek meghatározása a visszacsatoláshoz
3. alapjel beállítása, majd különbségképzés
4. rendelkező jel átalakítása, *beavatkozó* jel generálása



$C(s)$ a szabályozó

$G(s)$ a szabályozott rendszer

$R(s)$ a referenciajel (vagy alapjel)

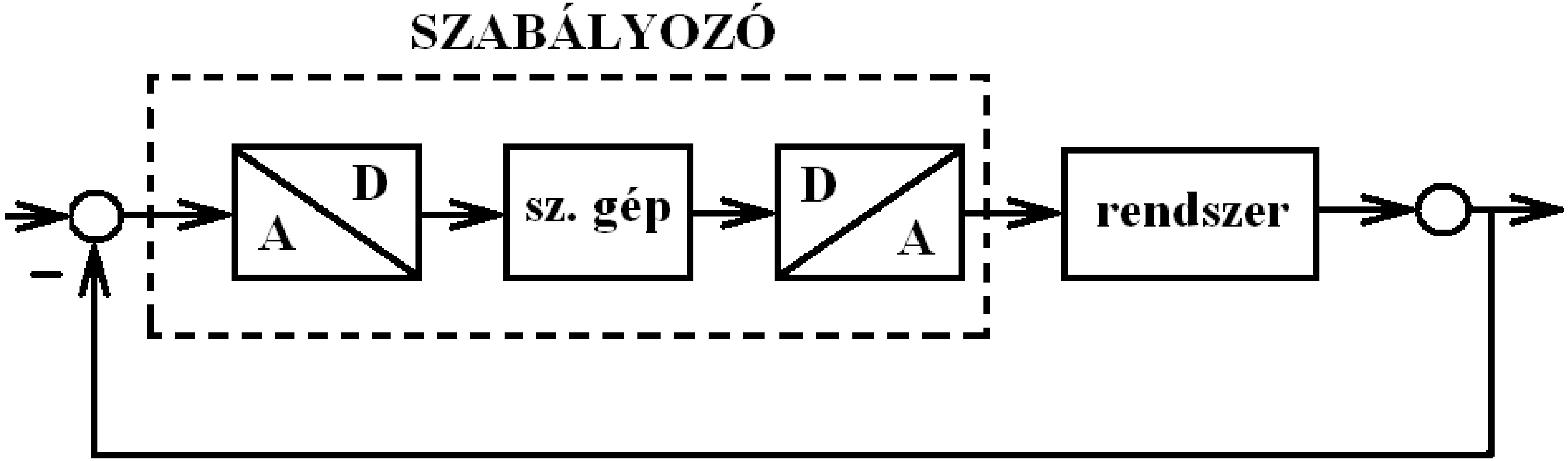
$E(s)$ a hibajel (vagy rendelkezőjel)

$U(s)$ a beavatkozó jel (control input)

$D(s)$ a zavaró jel

$Y(s)$ a szabályozott jellemző (kimenet)

Számítógépes irányítórendszer felépítése: Analóg/digitális (A/D) jelátalakítót, az irányítási algoritmust megvalósító számítógépet, digitális/analóg (D/A) átalakítót, és ún. tartószervet tartalmaz.



Analízis: Modell alapján a rendszer tulajdonságok vizsgálata.

Szintézis: Modell alapján a megadott kritériumok figyelembevételével a zárt hurkú irányítás megtervezése.

1. Irányításelmélet alapfogalmai
   - linearitás, időinvariancia, kauzalitás, stabilitás, visszacsatolás
   - szabályozási feladat hatásvázlata
2. **Lineáris időinvariáns rendszerek modelljei**
   - időtartományi leírás: differenciálegyenlet és súlyfüggvény
   - átviteli függvény
   - frekvencia függvények

Lineáris, állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenletek:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i}\Big|_{t=0} = y^i(0), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{d^j u(t)}{d^j(t)}\Big|_{t=0} = u^j(0), \quad j = 1, \ldots, m.$$

$a_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad , b_j, \quad j = 1, \ldots, m$

együtthatók konstansok, nem függnek az időtől.

A bemenőjel-kimenőjel kapcsolatot leírhatjuk egy tipikus, ún. Dirac-delta függvényre adott válaszfüggvénnyel is.

A Dirac-delta függvény pontos matematikai definíciója:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{ha} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ha} \quad t \neq 0. \end{cases}$$

A Dirac-delta függvény definíciója a mérnöki gyakorlatban:

$$\text{vagy} \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ha} \quad t \neq 0. \end{cases}$$

A Dirac-delta bemenőjelre adott válaszfüggvényt a rendszer **súlyfüggvényének** nevezzük.

A súlyfüggvény segítségével egy tetszőleges bemenőjelre adott válaszfüggvény az alábbi **konvolúciós integrállal** számítható:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Az átviteli függvényt a differenciálegyenletből kiindulva a *Laplace-transzformáció* alkalmazásával vezethetjük be.

Jelölje egy $f(t)$ függvény $\mathcal{L}$-transzformáltját $F(s)$, azaz

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Vegyük a differenciálegyenlet $\mathcal{L}$ - transzformáltját zérus kezdeti feltételekkel. Ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \ldots b_1 s + b_0) U(s)$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}.$$

A $G(s)$ racionális törtfüggvényt $(m \leq n)$ a rendszer **átviteli függvényének** nevezzük. Az átviteli függvény tehát a kimenőjel és a bemenőjel zérus kezdeti feltételekkel vett $\mathcal{L}$ - transzformáltjainak hányadosa.

Az átviteli függvény alapján definiáljuk a lineáris idő-invariáns dinamikus rendszerek *zérusait* és *pólusait*.

A $b(s) = 0$ egyenlet z_j $(j = 1, \ldots, m)$ gyökeit a rendszer **zérusainak**,

$a(s) = 0$ egyenlet p_i $(i = 1, \ldots, n)$ gyökeit pedig a rendszer **pólusainak** nevezzük.

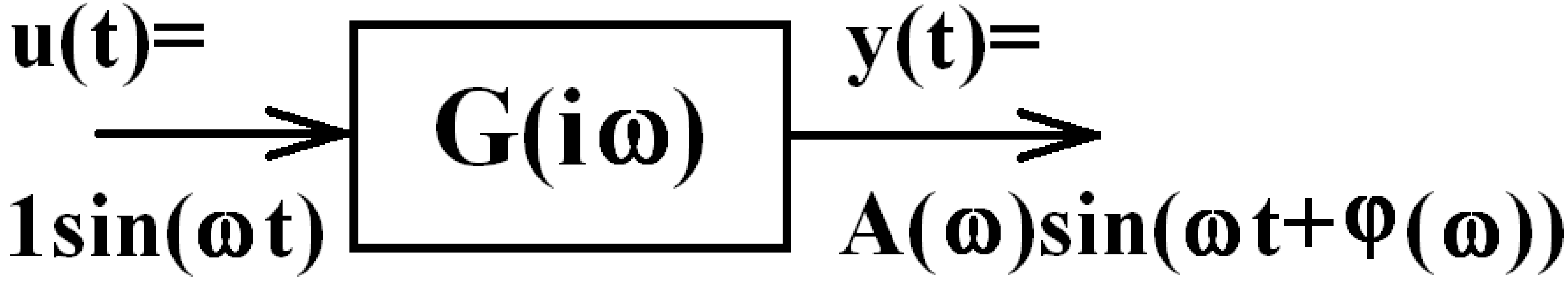
Az átviteli függvényt felírhatjuk ún. zérus - pólus alakban:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}, \quad k = \frac{b_m}{a_n}$$

A $\mathcal{L}$ - transzformáció azon tulajdonságát felhasználva hogy az időfüggvények konvolúciójának $\mathcal{L}$ - transzformáltja a $\mathcal{L}$ - transzformáltak szorzata, a súlyfüggvény és az átviteli függvény kapcsolata:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Egy rendszer **frekvenciafüggvényének** a rendszernek egységamplitúdójú szinuszos bemenőjelre, állandósult állapotban adott válaszfüggvényét nevezzük.



Itt a bemenőjel egy egységnyi amplitúdójú szinusz lefutású jel, amelynek körfrekvenciája ω.

Legyen egy rendszer $G(s)$ átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{b}{s+a}.$$

A szinuszos jel $\mathcal{L}$-transzformáltját alkalmazva vizsgáljuk meg, hogy mi lesz a rendszer kimenőjele.

A reziduum tétel felhasználásával írhatjuk:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{s+a}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \lim_{s\to -a}(s+a)\frac{b\omega}{(s+a)(s^2+\omega^2)}e^{st}$$
$$+\lim_{s\to -i\omega}(s+i\omega)\frac{b\omega}{(s+a)(s+i\omega)(s-i\omega)}e^{st}$$
$$+\lim_{s\to i\omega}(s-i\omega)\frac{b\omega}{(s+a)(s+i\omega)(s-i\omega)}e^{st}$$

Elvégezve a megfelelő határérték képzéseket:

$$y(t) = \frac{b\omega}{a^2+\omega^2}\left(e^{-at} + \frac{a+i\omega}{-2i\omega}e^{-i\omega\, t} + \frac{a-i\omega}{2i\omega}e^{i\omega\, t}\right)$$

Írjuk át a $\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2}$ komplex számot exponenciális alakba:

$$\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-i\ \varphi(\omega)}, \quad \text{ahol} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a},$$

majd felhasználva az Euler - összefüggést az állandósult állapotra azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = A(\omega)\sin(\omega\, t + \varphi(\omega)), \quad \text{ahol} \quad A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2+\omega^2}}.$$

Az $A(\omega)$ függvényt **amplitúdó függvénynek**, a bemenőjel és a kimenőjel közötti fáziseltolást jelentő $\varphi(\omega)$ függvényt pedig **fázisfüggvénynek** nevezzük, mindkettő a bemenőjel ω körfrekvenciájától függ.

Látható továbbá, hogy az amplitúdó függvény a $G(s)$ átviteli függvényből az $s = i\omega$ helyettesítés után mint a $G(i\omega)$ függvény abszolút értéke,

$$A(\omega) = \mid G(i\omega) \mid = \mid ReG(i\omega) + iImG(i\omega) \mid =$$
$$= \sqrt{Re^2 G(i\omega) + Im^2 G(i\omega)}$$

a fázisfüggvény pedig mint a $G(i\omega)$ fázisfüggvénye kapható:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{ImG(i\omega)}{ReG(i\omega)}\right).$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\tilde{u}(t) = e^{i\omega\, t}, \quad \tilde{y}(t) = A(\omega)e^{i(\omega\, t+\varphi(\omega))}.$$

Látható, hogy a tényleges bemenő és kimenő jelek az $\tilde{u}(t)$ és $\tilde{y}(t)$ jelek imaginárius részei, így ezeket az $\tilde{u}(t)$ és $\tilde{y}(t)$ jelek lineáris transzformációjával kaphatjuk vissza. Felhasználva, hogy

$$\frac{d^l\tilde{u}(t)}{dt^l} = (i\omega)^l\tilde{u}(t), \quad l = 1,\ldots,m,$$

$$\frac{d^k\tilde{y}(t)}{dt^k} = (i\omega)^k\tilde{y}(t), \quad k = 1,\ldots,n.$$

Ezeket a differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$a(i\omega)\tilde{y}(t) = b(i\omega)\tilde{u}(t)$$

$$\begin{aligned}\big(a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(i\omega) + a_0\big)\tilde{y}(t) = \\ \big(b_m(i\omega)^m + \ldots + b_1(i\omega) + b_0\big)\tilde{u}(t)\end{aligned}$$

Mindkét oldalon vehetjük a képzetes részeket, és felhasználva a frekvenciafüggvény definícióját kapjuk, hogy

$$A(\omega) = \mid G(i\omega) \mid = \left| \frac{b(i\omega)}{a(i\omega)} \right|, \quad \varphi(\omega) = \arg G(i\omega).$$

A $G(i\omega)$ függvényeket a rendszer **frekvenciafüggvényének** nevezzük és az ω körfrekvencia szerint ábrázoljuk.

A frekvenciafüggvény ábrázolásának egyik módja az, amikor az amplitúdó függvényt mint vektort egy polár koordináta rendszerben ábrázoljuk a hozzátartozó $\varphi(\omega)$ függvény segítségével, ahol az $A(\omega)$ hosszúságú vektornak a pozitív valós tengellyel bezárt szöge éppen a $\varphi(\omega)$ szög.

A frekvenciafüggvénynek ezt az ábrázolásmódját **Nyquist-diagramnak** nevezzük.

A frekvenciafüggvények egy másik ábrázolásmódja az, amikor az $A(\omega)$ amplitúdó függvényt az ω(lg) függvényében ábrázoljuk, decibelben. Ennek alapján a függőleges tengelyen $|\,G(i\omega)\,|\,\mathrm{dB} = 20\log A(\omega)$ szerepel. Ebben az esetben a $\varphi(\omega)$ fázisfüggvényt külön diagramban, a ω(lg) függvényében ábrázoljuk fokban.

Ezt az ábrázolást a rendszer **Bode-diagramjának** nevezzük.