Inverz inga irányítása állapot-visszacsatolással

Segédlet az Irányítástechnika c. tantárgyhoz

Összeállította:

Dr. Bokor József, egyetemi tanár
Dr. Gáspár Péter, tanszékvezető egyetemi tanár
Dr. Szászi István, címzetes egyetemi docens
Dr. Tettamanti Tamás, egyetemi adjunktus

BME KJK, Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

2017. január 1.

1. Bevezető

A labor során az állapot-visszacsatolással történő szabályozás tervezése kerül bemutatásra. A módszer neve abból adódik, hogy rendszer bemenetére visszahat (visszacsatolt módon) az aktuális állapot egy k^T erősítési vektorral súlyozva, azaz egy megfelelő szabályozó jel

$$u = -k^T x + r$$

alakú lesz, ahol a negatív előjel a negatív visszacsatolást valósítja meg és r pedig a referenciajel. Ezzel a szabályozással képesek vagyunk a rendszer pólusainak módosítására, ezért ezt a technikát pólusallokációnak vagy pólusáthelyezésnek is nevezzük.

A labor témája egy inverz inga stabilizáló szabályozása állapot-visszacsatolással. Az inverz inga egy egyenes pályán mozgó kocsiból és arra csuklóval felerősített, a kocsi mozgásának irányában elforgatható rúdból álló mechanikai rendszer (lásd az 1. ábra). Ez egy önmagában instabil rendszer, amely vegyesen stabil, instabil, ill. a stabilitás határán lévő pólusokkal rendelkezik. A szabályozási feladat során ennek megfelelően olyan szabályozást tervezünk, amely

- stabil pólusokat biztosít, és ezáltal
- képes az inga rúdját stabilan függőleges pozícióban tartani.

Ezt a kocsira ható megfelelő irányú és nagyságú erővel érhetjük el. Ez az erő lesz tehát az u szabályozó bemenet. Az inverz inga esetében a követendő referencia jel a rúd szögelfordulása, amelyet így $r = 0$ értéknek választunk. Így a keresendő u bemenő jel

$$u = -k^T x$$

alakra egyszerűsödik.

2. Szabályozási feladat

A feladat a rúdnak függőleges pozícióban tartása a zavaró határok ellenére. Az inverz inga fizikai modellje az 1. ábrán látható. Legyen a kocsi tömege M, a rúd hossza pedig 2ℓ, melyek értékei $M = 2kg$, $m = 0.1kg$, $\ell = 0.5m$.

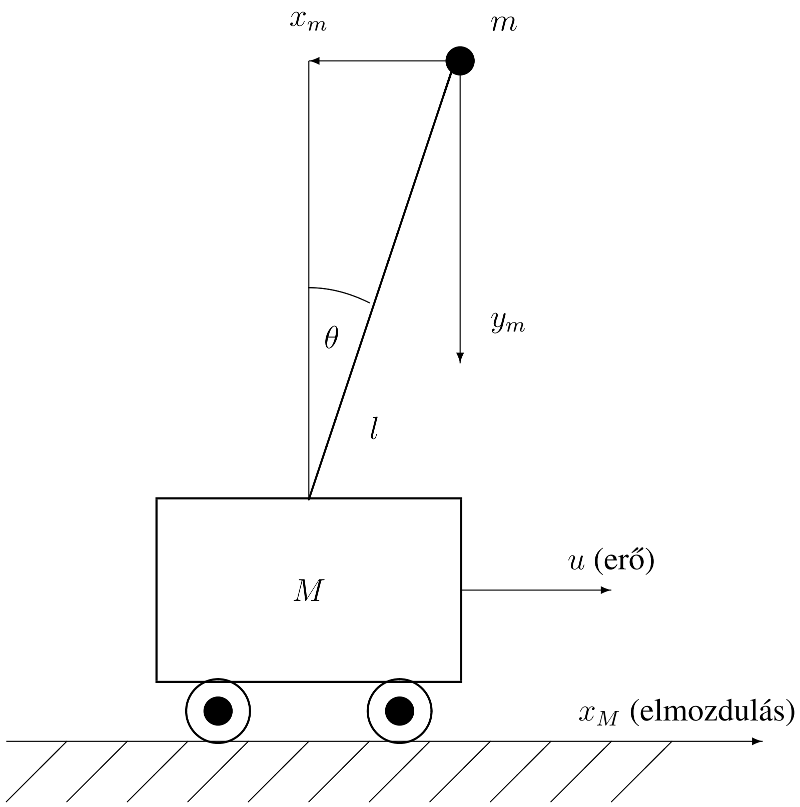
Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

- Írjuk fel az inverz inga modelljét.
- Tervezzünk állapot-visszacsatolt szabályozót. Helyezzük el a rendszer pólusait a következőképpen:

$$p = \begin{bmatrix} -2 \pm 3.46i & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

- Vizsgáljuk meg a tervezett rendszer minőségi tulajdonságait.
- Ismételjük meg a tervezést más pólusokkal és hasonlítsuk össze a tervezett rendszerek minőségi tulajdonságait.

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \pm 1.73i & -5 & -5 \end{bmatrix}$$
$$p_2 = \begin{bmatrix} -4 \pm 6.92i & -20 & -20 \end{bmatrix}$$



1. ábra. Az inverz inga illusztrációja

3. Az inverz inga modelljének felírása

A rúd állandó keresztmetszetű és homogén anyagú, így a súlypontjában ébredő pontszerű m tömeggel modellezhető. A kocsira u erő hat, míg a merev rúdban F és $-F$ erők ébrednek. Az M kocsi x_M irányú gyorsulása, valamint az m rúd x_m és y_m irányú gyorsulása az alábbi összefüggésekkel írható fel.

- Mechanikai egyenletek (Newton II. törvénye):

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x}_M &= u - F\sin\theta \\
m\ddot{x}_m &= F\sin\theta \\
m\ddot{y}_m &= F\cos\theta - mg
\end{aligned}
$$

- Geometriai egyenletek:

$$
\begin{aligned}
x_m &= x_M + \ell\sin\theta \\
\ddot{x}_m &= \ddot{x}_M - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta + \ell\ddot{\theta}\cos\theta \\
y_m &= \ell\cos\theta \\
\ddot{y}_m &= -\ell\dot{\theta}^2\cos\theta - \ell\ddot{\theta}\sin\theta
\end{aligned}
$$

Az ismeretlen F értékét kiküszöbölve és egy oldalra rendezve a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_m - u &= 0 \\ m\ddot{y}_m \sin\theta - m\ddot{x}_m \cos\theta + mg\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

Az x_m és y_m kifejezéseket behelyettesítve a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_M - m\ell\dot{\theta}^2 \sin\theta + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - u &= 0 \\ m\ell\ddot{\theta} + m\ddot{x}_M \cos\theta - mg\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

A következő lépésben a fenti nemlineáris egyenletrendszert mérnöki megfontolásokkal linearizáljuk. A szabályozási feladat a rúd $\theta(t)$ szögének minél kisebb értéken tartása, ezért a következő közelítéseket alkalmazzuk. Egyrészt kis szögekre $\sin\theta \cong \theta$ és $\cos\theta \cong 1$, másrészt a felső egyensúlyi ponton a rúd szögsebessége kicsi, így $\dot{\theta}^2 \cong 0$. Ezeket kihasználva a következő jól használható közelítést kapjuk:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_M + m\ell\ddot{\theta} - u &= 0 \\ m\ell\ddot{\theta} + m\ddot{x}_M - mg\theta &= 0 \end{aligned}$$

Ebből az egyenletrendszerből fejtsük ki $\ddot{x}_M$ és $\ddot{\theta}$ változókat, ami egyben az inga fizikai mozgásegyenleteiből álló egyenletrendszert jelenti:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_M &= -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u \\ \ddot{\theta}_M &= \frac{(M+m)\,g}{M\ell}\theta - \frac{1}{M\ell}u \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer alapján írjuk fel az inverz inga állapottér reprezentációját. Legyenek az állapotvektor elemei a következők: a kocsi elmozdulása: x_M, a kocsi sebessége: $\dot{x}_M$, a rúd szögelfordulása: θ, a rúd szögsebessége: $\dot{\theta}$.

$$x = \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x}_M \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Legyen az y kimenőjel a kocsi elmozdulása, azaz

$$y = x_M$$

A rendszer állapottér reprezentációja a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

ahol

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{M\ell}g & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{M\ell} \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A megadott fizikai paraméterek behelyettesítésével az $(A,\ b,\ c^T)$ állapottér reprezentáció a következő:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4905 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20.601 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Állapot-visszacsatolt szabályozó tervezése

Egy állapottér reprezentációban adott rendszer állapot-visszacsatolásának tervezése általánosságban a következő lépésekben történik.

1. Az irányíthatóság ellenőrzése. Egy (A, b, c^T) állapottér-reprezentációval adott rendszer akkor irányítható, ha a rendszer véges T idő alatt az $x(0)$ állapotból egy tetszőleges $x(T)$, $x(T) \neq x(0)$ állapotba vihető az $u(t)$, $t \geq t_0$ szabályozó jellel.

   Ha a rendszer nem irányítható, akkor az állapot-visszacsatolás módszere nem alkalmazható.

2. A rendszert irányíthatósági alakra hozzuk, azaz meghatározzuk T nem szinguláris mátrixot, amely a rendszert irányíthatósági alakúra transzformálja. Ha a rendszer irányíthatósági alakban adott, akkor T mátrixot egységmátrixnak választjuk. Megjegyezzük, hogy az új állapottérbe való transzformálás tényleges elvégzésére nincs szükség, elegendő a transzformációs mátrix meghatározása.

3. Meghatározzuk az eredeti rendszer és a tervezett rendszer karakterisztikus polinomját. Ehhez az eredeti rendszer A mátrixát és a szabályozott rendszertől megkövetelt új pólusokat kell felhasználni.

4. Kiszámítjuk a kompenzátor értékét.

5. Elemezzük a zárt rendszert.

Hajtsuk végre a tervezést a fenti lépéseknek megfelelő sorrendben.

1. Az irányíthatósági mátrix rangját Matlabban két lépésben tudjuk meghatározni.

   - Irányíthatósági mátrix:

     ```
     C=ctrb(A,b)}
     ```

   - Rang számítás

     ```
     n=rank(C)
     ```

   Ha n értéke megegyezik az állapotok számával, akkor az állapottér reprezentáció irányítható és az állapottér-visszacsatolt szabályozó tervezése elvégezhető.

   Az eredményül kapott 4-dimenziós irányíthatósági mátrix teljes rangú:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.4903 \\ 0.5 & 0 & 0.4903 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -20.594 \\ -1 & 0 & -20.594 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Az állapottér reprezentáció nem irányíthatósági alakban adott, így meg kell határozni azt a transzformációs mátrixot, ami irányíthatósági alakra hozza a reprezentációt:

$$T_c = (\mathcal{C}\mathcal{T})^{-1}$$

ahol $\mathcal{C}$ az irányíthatósági mátrix (az előző lépésben már kiszámítottuk) és $\mathcal{T}$ egy speciális struktúrájú (ún. Toeplitz felső háromszög-mátrix):

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -20.594 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -20.594 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}$ felírásához felhasználtuk a rendszer karakterisztikus polinomjának együtthatóit:

$$a(s) = \det(sI - A) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = s^4 - 20.6s^2$$

ahol $a_3 = 0$, $a_2 = -20.60$, $a_1 = 0$, $a_0 = 0$.

A transzformációs mátrix tehát a következőképpen adódik:

$$T_c = (\mathcal{C}\mathcal{T})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.4903 \\ 0.5 & 0 & 0.4903 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -20.594 \\ -1 & 0 & -20.594 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -20.594 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -20.594 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & -9.81 \\ 0.5 & 0 & -9.81 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.102 & 0 & -0.051 \\ -0.102 & 0 & -0.051 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel az eredeti rendszer és a tervezendő rendszer karakterisztikus polinomjait, ha a tervezett rendszer pólusai az alábbi vektor szerintiek:

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} -2 + 3.46i & -2 - 3.46i & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

$\bar{p}$ alapján a tervezett rendszer karakterisztikus polinomja ($\bar{a}(s)$) a következő alakra hozható (gyöktényezős alak):

$$\begin{aligned} \bar{a}(s) = (s + 2 - 3.46i)(s + 2 + 3.46i)(s + 10)(2 + 10) = \\ s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 719.4s + 1597.2 = \\ s^4 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_0 \end{aligned}$$

ahol $\bar{a}_3 = 24$, $\bar{a}_2 = 196$, $\bar{a}_1 = 719.4$, $\bar{a}_0 = 1597.2$.

4. A kompenzátort az irányíthatósági állapottérnek megfelelő értékekkel kapjuk:

$$\begin{aligned} k_c^T &= \begin{bmatrix} \bar{a}_3 - a_3 & \bar{a}_2 - a_2 & \bar{a}_1 - a_1 & \bar{a}_0 - a_0 \end{bmatrix} \\ k_c^T &= \begin{bmatrix} 24 & 216.6 & 719.4 & 1597.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A tervezendő kompenzátor a megfelelő állapottér transzformációval a következő alakra hozható:

$$k^T = k_c^T \cdot T_c^{-1}$$
$$k^T = \begin{bmatrix} -162.8 & -73.4 & -297.9 & -60.7 \end{bmatrix}$$

Matlab szoftver alkalmazása esetén egyetlen beépített függvény (*acker*) hívásával is kiszámítható az állapottér-visszacsatolási feladat, azaz a 2-4. lépések összevonva megoldhatók. A függvény szintaktikája a következő:

```
k=acker(A,B,p)
```

ahol A, b a rendszermátrixok, míg p az új pólusokat tartalmazó sorvektor (a 3. lépésben ezt $\bar{p}$ jelöléssel definiáltuk; itt felső vonás nélkül szerepel, mert azt a Matlab parancssorába nem tudjuk beírni). Az *acker* függvény lefuttatása után eredményül kapott k erősítési vektor az eredeti rendszer állapotterére vonatkozik, így még az irányíthatósági transzformációs mátrixot sem kell megkeresni.

5. A zárt rendszer állapottér reprezentációja:

$$\dot{x} = (A - bk^T)x + br$$
$$y = c^T x$$

ahol az $A - bk^T$ mátrix a következő:

$$A - bk^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 81.5 & 36.7 & 148.6 & 30.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -162.9 & -73.4 & -277.4 & -60.7 \end{bmatrix}$$

A 2. ábra az állapot jelek egységugrás bemenetre adott átmeneti függvényeit mutatja. A kimeneti jel átmeneti függvényére jellemző tranziens adatok a következők:

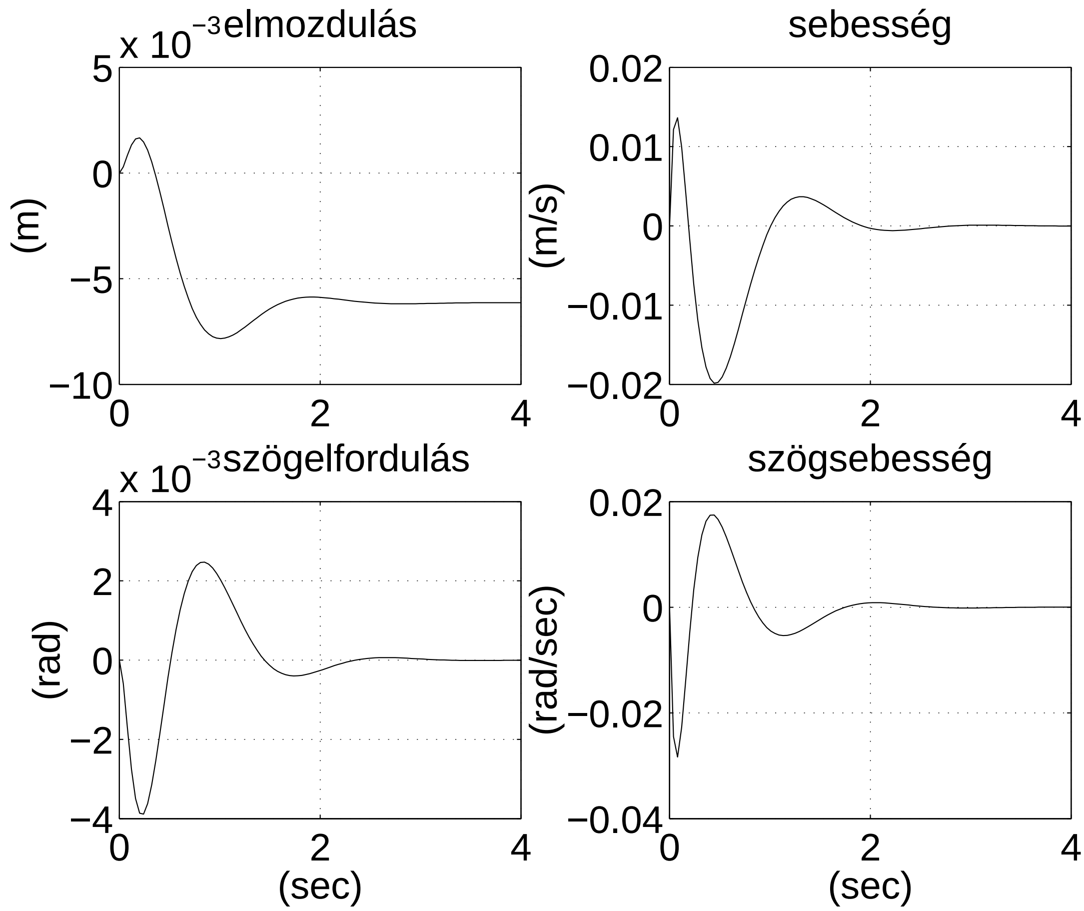
- növekedési idő: 0.35 sec,
- beállási idő: 1.93 sec,
- késleltetési idő: 0.37 sec,
- túllendülési idő (mértéke): 1.02 sec (26.8%).

A tervezési lépéseket a példa következő eseteiben is a fentiekkel megegyezően lépésekben kell végrehajtani. A $\bar{p}_A$ pólus konfiguráció esetében a pólusokat az origóhoz közelebb kívánjuk helyezni úgy, hogy felezzük a fentiekben megadott $\bar{p}$ pólusértékeket:

$$\bar{p}_A = 0.5 \cdot \bar{p} = \begin{bmatrix} -1 + 1.73i & -1 - 1.73i & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

A 3. ábra az állapot jelek egységugrás bemenetre adott átmeneti függvényeit mutatja. A kimeneti jel átmeneti függvényére jellemző tranziens adatok a következők:

- növekedési idő: 1.04 sec,
- beállási idő: 3.03 sec,



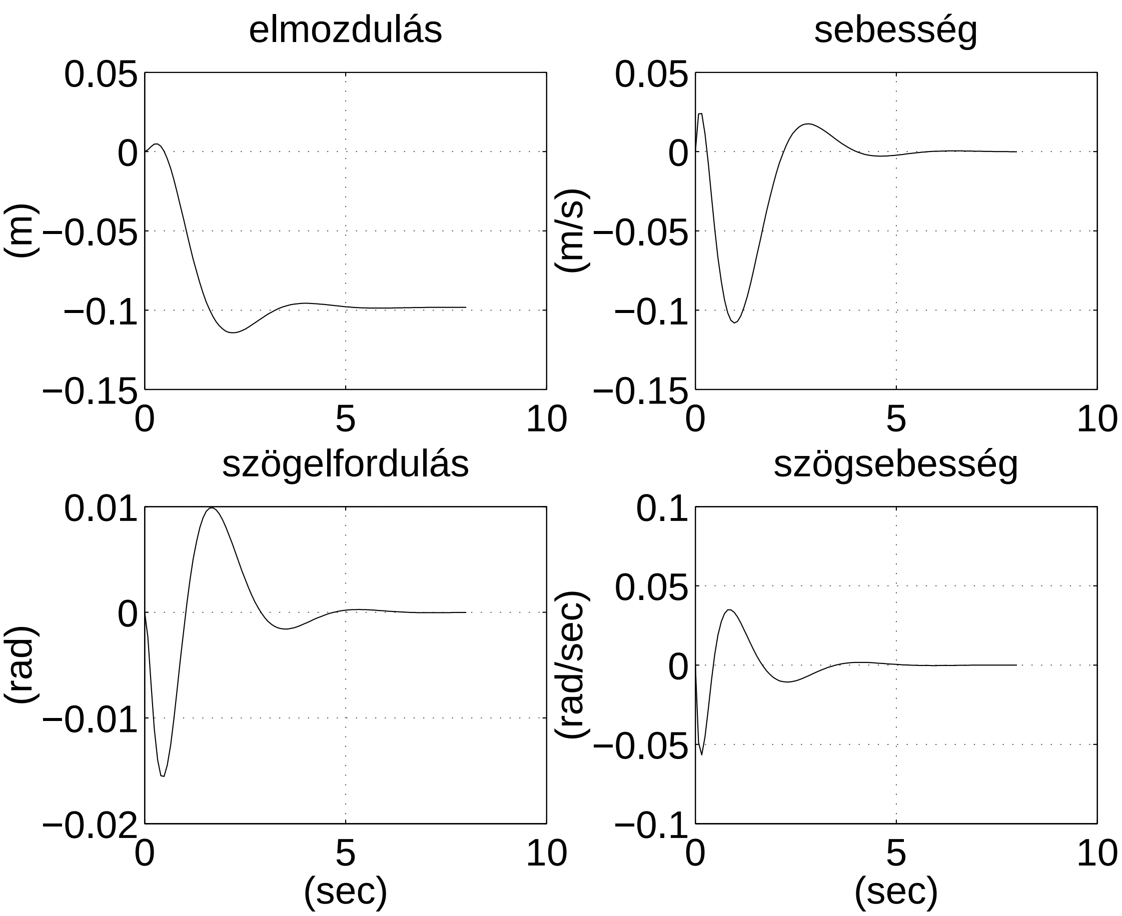
2. ábra.

- késleltetési idő: 0.57 sec,
- túllendülési idő (mértéke): 2.2 sec (16.8%).

Ebben az esetben a kimenti jel beállási ideje közel 50%-kal nőtt, viszont a túllendülés mértéke 10%-kal csökkent. A megfelelő kompenzátor kiválasztása valamilyen kompromisszum alapján történik, amelyben a minőségi jellemzők egy része javul a többiek rovására. A tervezési feladat a lényeges minőségi jellemzőket javítása úgy, hogy közben a kevésbé lényeges jellemzők minősége ne romoljon túlságosan, azaz a jellemzők közötti összhang megteremtése.

Házi feladatként vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a zárt rendszer pólusait (hívjuk most $\bar{p}_B$-nek!) az origótól távolabb helyezzük el megduplázva az elsőként megadott $\bar{p}$ pólusokat:

$$\bar{p}_B = 2 \cdot \bar{p} = \begin{bmatrix} -4 + 6.92i & -4 - 6.92i & -20 & -20 \end{bmatrix}$$



3. ábra.

5. MATLAB implementáció (Matlab script)

inverzinga.m:

```
% Inverz inga iranyitasa polusallokacioval
clear all;
close all;
clc;
format compact

% A rs.z definialasa (A, b, c') allapotter leirassal

A=[0 1 0       0;
0 0 -0.4903 0;
0 0 0       1;
0 0 20.594  0];
b=[0 0.5 0 -1]';
c=[1 0 0 0];
d=0; %d, mint zavaras -> y=c'*x+d*u

%iranyithatosagi matrix
contr=[b A*b A^2*b A^3*b]
disp('Iranyithatosagi matrix rangja:');
%Vagy a beepitett Matlab paranccsal egy lepesben:
ctrb(A,b) %Eloallitja a controllability matrixot
rank(contr)

% Az eredeti rsz polusai
disp('Az eredeti rsz polusai');
po=eig(A)
```

```
%sulyfuggveny
[N, D]=ss2tf(A,b, c, d); %State Space To Transfer Function
% Az ss2tf eloallitja az atv. fgv.-t: G(s)=Y/U=c'*inv(sI-A)*b+d
%lasd Command Windowban: >>help ss2tf

figure;
impulse(N,D), title('sulyfgv');

%itt lefuttatni !!

%%%%% polus athelyezes, az uj polusok
p_=[-2+3.46i -2-3.46i -10 -10];

disp('az eredeti rsz. kar. polinomja:');
a=poly(A) %a polinomialis egyutthatokat szamitja ki
disp('Az uj polusokkal vett rsz. polinomja:')
J=diag(p_) %diagonalis segedmatrix (diagonalelemei az uj polusok)
a_=poly(J)
disp('erosites iranyithatosagi alakban:')
kc=a_-a

%itt kellene a T=inv(C*Tau) es k=kc*T..., de az ACKER fgv megcsinalja ehelyett egy lepesben!

%%%%%% polusathelyezes 1.
p=p_;
%az Ackermann formula hasznalata
k=acker(A,b,p)
%sulyfgv
[N, D]=ss2tf(A-b*k,b,c,d); %atv fgv

figure;
impulse(N, D);

%%%%%% polusathelyezes 2.
p=0.5*p_;
%az Ackermann formula hasznalata
k=acker(A,b,p)
%sulyfgv
[N, D]=ss2tf(A-b*k,b,c,d); %atv fgv
figure;
impulse(N, D);

%%%%%% polusathelyezes 3.
p=2*p_;
%az Ackermann formula hasznalata
k=acker(A,b,p)
%sulyfgv
[N, D]=ss2tf(A-b*k,b,c,d); %atv fgv
figure;
impulse(N, D);

%ez a legjobb, mert itt tavolodtunk el legjobban az y tengelytol, de ezzel parhuzamosan
%a k vektor erteke is csokken, tehat a control energia meg egyre no.
%Az alkalmazando szab. jel: u=-k'*x+r, ahol a ref. jel: r=0
```