A jelfeldolgozás alapjai

DR. SOUMELIDIS ALEXANDROS

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

MŰEGYETEM 1782

Budapest, 2016. december

A szűrésről általában

Szűrés: *jelátalakítás*, *jelformálás* idő- vagy frekvenciatartományban.

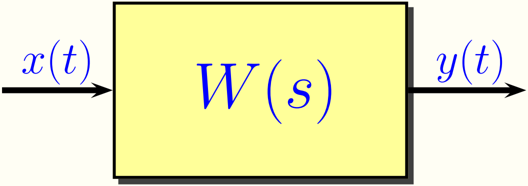
Példák:

- Anti-aliasing szűrés: sávkorlátozott jel előállítása a Shannon-törvény szerinti helyes mintavételezéshez.
- Zajszűrés: ismert spektrumú zaj hatásának csökkentése, jel/zaj-viszony javítása.
- Lényegkiemelés: determinisztikus komponens kiemelése, zavaró komponensek, zajok eltávolítása.
- Hallható hangspektrum alakítása: mély/magashang kiemelés/vágás, komponensek leválasztása.
- Képek manipulálása: élesítés, tompítás, sötétítés, világosítás, kontraszt növelése/csökkentése, színkonverziók.

Szűrő: egy operátor a jelek terében, amely valamely x jelet y-ba képez le.

$$S : x \to y \quad \text{vagy} \quad y = Sx$$

Lineáris szűrő: lineáris operátor, lineáris rendszer:



Szűrés szűkebb értelemben:

egy jel meghatározott frekvenciatartományba eső részének kiemelése/csillapítása.

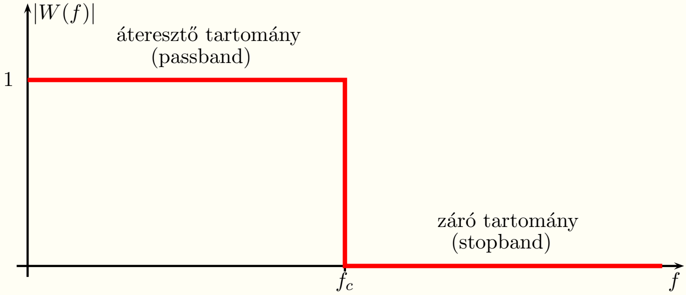
Szűrés frekvenciatartományban

Szűrő karakterisztikák (tipikus esetek):

- Aluláteresztő (lowpass – LP) szűrő: a jelet valamely f_c frekvencia alatti sávban engedi át.
- Felüláteresztő (highpass – HP) szűrő: a jelet valamely f_c frekvencia feletti sávban engedi át.
- Sávszűrő: a jelet valamely f_a és f_b frekvenciák közötti sávban
  - engedi át – sáváteresztő (bandpass – BP) szűrő, vagy
  - zárja le – sávzáró (bandstop – BS) szűrő.

Az ideális LP szűrő karakterisztikája:

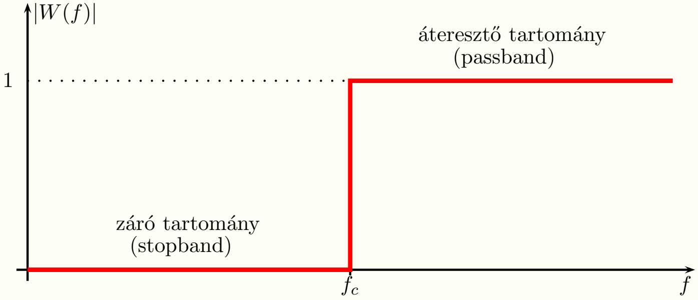
Amplitudó-karakterisztika:



Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Az ideális HP szűrő karakterisztikája:

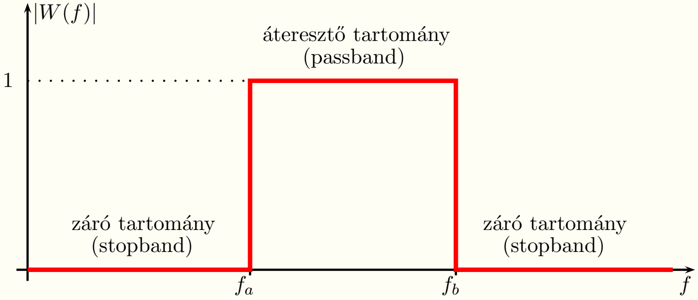
Amplitudó-karakterisztika:



Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Az ideális BP szűrő karakterisztikája:

Amplitudó-karakterisztika:

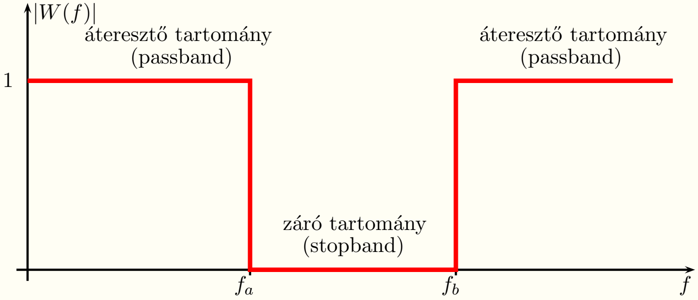


Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Sávzáró szűrő

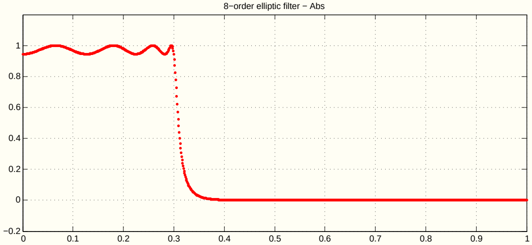
Az ideális BS szűrő karakterisztikája:

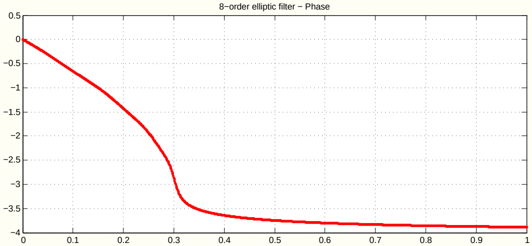
Amplitudó-karakterisztika:



Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Nemideális LP szűrő





Valóságos szűrő

Valóságos – realizálható szűrők – tulajdonságai:

- Áteresztősávban a karakterisztika nem állandó – áteresztősávi hullámzás.
- Zárósávban a karakterisztika nem állandó – zárósávi hullámzás.
- Zárósávban nem zérus az erősítés – véges csillapítás.
- Az áteresztő- és zárósáv közti átmenet meredeksége (a szűrő meredekségét) véges.
- A fázis-karakterisztika nem zérus – a szűrőnek (frekvenciafüggő) késleltetése van.

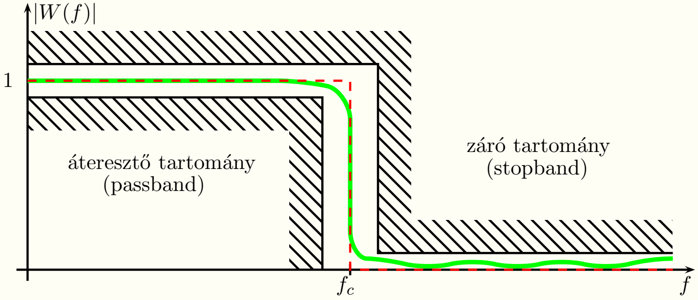
A szűrőtervezés alapelvei

Szűrőtervezés: approximálni az ideális szűrőkarakterisztikát bizonyos feltételek teljesítése mellett:

- Minél pontosabban megvalósítani a sávok határainak megfelelő frekvenciákat.
- Biztosítani a szűrő meredekségét.
- Az áteresztősávi erősítést minél pontosabban 1-re beállítani.
- Az áteresztősávi hullámzást (ha van ilyen) meghatározott érték alatt tartani.
- A zárósávi csillapítást megfelelően kis értékűre állítani.
- A zárósávi hullámzást (ha van ilyen) meghatározott érték alatt tartani.
- A szűrő késleltetését megfelelően kis értéken tartani.
- A szűrő fázismenetét megfelelően megválasztani (pl. lineáris fázis).

A szűrőtervezés alapelvei

Toleranciasávok:



Követelmény: Az approximált karakterisztika maradjon a toleranciasávon belül.

A szűrőtervezés alapelvei

Az említetteken kívül még számos más követelmény is felállítható, például:

- Időtartományi tulajdonságok: késleltetés, felfutási idő, túllövés minimalizálása.
- A realizáláshoz tartozó tulajdonságok biztosítása, például:
  - A szűrő zaja áteresztő/záró tartományban legyen valamely határ alatt.
  - A realizáló elemek pontatlanságára legyen minimálisan érzékeny (toleranciaérzékenység minimalizálása).

Szűrő-approximációk

Approximációs módszer:

- Választunk egy approximáló függvényrendszert — ortogonális (valamely súlyfüggvényre nézve ortogonális) rendszer kedvező.
- Az approximáció egy függvénysor formájában adódik.
- Véges approximáció együtthatói kiszámíthatók:
  - Ortogonális rendszerek esetén: skaláris szorzat, ortogonális projekció.
  - Általános esetben: *least-square* illesztés.

Szűrő-approximációk

Butterworth szűrő

- Monoton *maximálisan lapos* karakterisztika.
- Nem ortogonális approximáló függvényrendszer – Butterworth polinom.

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}} \qquad \text{(aluláteresztő)}$$

n a szűrő rendszáma, ω_0 a törésponti körfrekvencia

Példák:

$$W_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \qquad W_2(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

$$W_3(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{s}{\omega_0} + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3}$$

Szűrő-approximációk

Csebisev (1. típusú Csebisev) szűrő

- Egyenletes hullámzás az áteresztősávban, monoton karakterisztika a zárósávban.
- $(1-x^2)^{-1/2}$ súlyfüggvényre nézve ortogonális approximáló függvényrendszer – elsőfajú Csebisev polinom.

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \qquad \text{(aluláteresztő)}$$

n a szűrő rendszáma, ω_0 a törésponti körfrekvencia, ε a hullámzás mértékét meghatározó tényező

$T_n(x)$ az un. elsőfajú Csebisev polinom,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad x = \cos\theta$$

Szűrő-approximációk

Inverz Csebisev (2. típusú Csebisev) szűrő

- Monoton karakterisztika az áteresztősávban, egyenletes hullámzás a zárósávban.
- Approximáló függvényrendszer: elsőfajú Csebisev polinomon alapuló rendszer,

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_n^{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}} \qquad \text{(aluláteresztő)}$$

n a szűrő rendszáma, ω_0 a törésponti körfrekvencia, ε a hullámzás mértékét meghatározó tényező

$T_n(x)$ az ortogonális elsőfajú Csebisev polinom,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad x = \cos\theta$$

Elliptikus (Cauer) szűrő

- Egyenletes hullámzás mind az áteresztősávban, mind pedig a zárósávban.
- $(1 - mx^2)^{1/2}$ súlyfüggvényre nézve ortogonális approximáló függvényrendszer – elsőfajú elliptikus racionális függvény.

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^{2n}\left(\xi, \frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \qquad \text{(aluláteresztő)}$$

n a szűrő rendszáma, ω_0 a töréspont körfrekvencia, ε a hullámzás mértékét meghatározó tényező, ξ a szelektivitásra (az áteresztősávi és zárósávi erősítés közti különbségre) vonatkozó tényező

$R_n(x)$ az un. elsőfajú (Jacobi) elliptikus racionális függvény.

Analóg és digitális szűrők

További osztályozási szempontok:

- Folytonos idejű szűrő vagy *analóg* szűrő: $W(s)$.
- Diszkrét idejű szűrő vagy *digitális* szűrő $W(z)$:
  - Véges impulzusválaszú szűrő — FIR (Finite Impulse-Response).
  - Végtelen impulzusválaszú szűrő — IIR (Infinite Impulse-Response).

Analóg szűrők

Leggyakoribb alaptípusok:

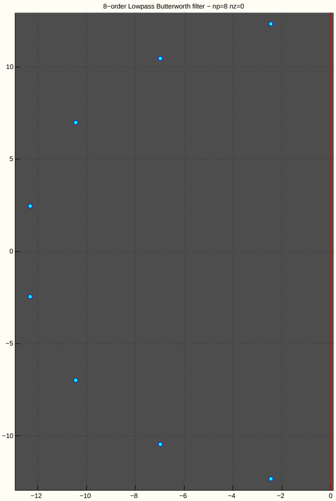
- Butterworth szűrő — "maximálisan lapos" karakterisztika.
- Csebisev szűrő — áteresztő tartományban egyenletes hullámzás.
- Inverz Csebisev szűrő — zárótartományban egyenletes hullámzás.
- Elliptikus szűrő (Cauer) — áteresztő és zárótartományban egyenletes hullámzás.

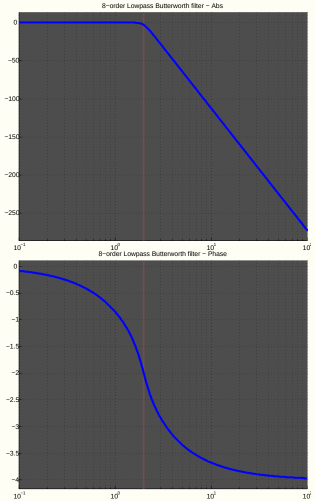
Hullámzás – ripple; egyenhullámzású szűrő – equiripple

Előállításuk: első- és másodrendű alaptagok kombinációiként —

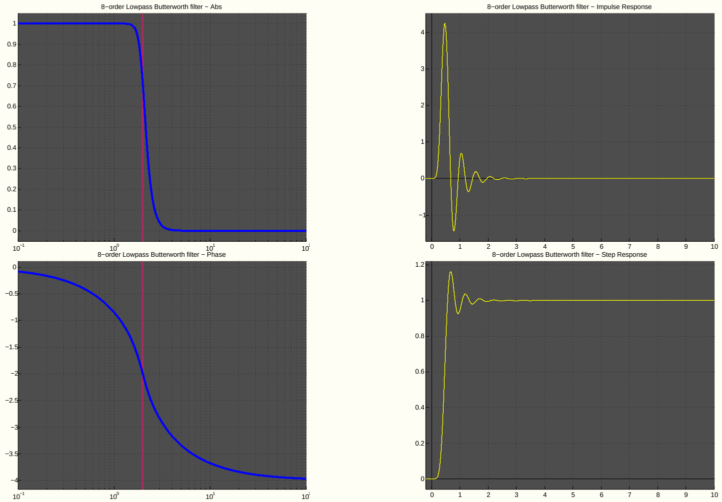
- Kaszkád kapcsolás: az alaptagok egymás után kapcsolása — $W(s) = W_1(s)W_2(s)\ldots W_N(s)$.
- Állapottér alapú realizáció — integrátorok, erősítők, összeadók, negatív visszacsatolás alkalmazása ("analóg számítógép").

8-rendű aluláteresztő Butterworth szűrő

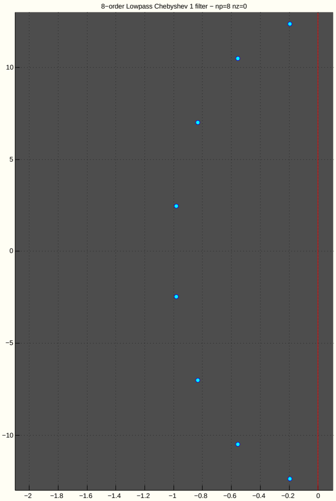


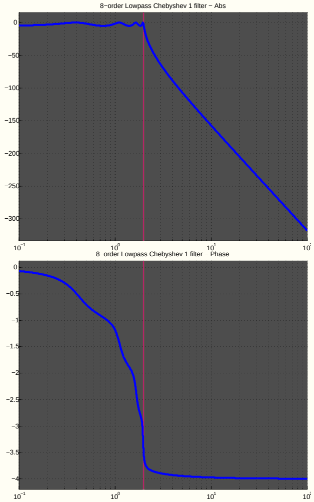


8-rendű aluláteresztő Butterworth szűrő

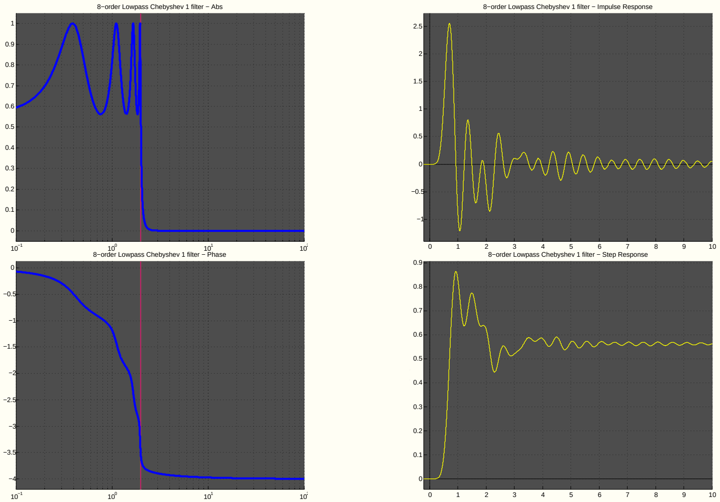


8-rendű aluláteresztő elsőfajú Csebisev szűrő





8-rendű aluláteresztő elsőfajú Csebisev szűrő



Analóg szűrők

Alaptagok:

- Elsőrendű alaptag: egy valós pólust realizál.
- Másodrendű alaptag: egy komplex konjugált póluspárt realizál.
- Harmadrendű alaptag: egy első- és másodrendű alaptag kombinációja, egy valós pólust és egy konjugált komplex póluspárt realizál — összevontan egyszerűbb megvalósítás.

Megvalósítás:

- Elsőrendű alaptag: egy RC vagy RL osztó, gyakoribb az RC.
- Másodrendű alaptag: egy RLC kör, vagy aktív RC-szűrő.

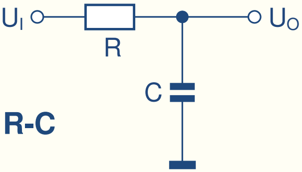
A megvalósítás problémái: az alaptagok hatnak egymásra

- Soros és párhuzamos kapcsolások alakulnak ki.
- Egy fokozat terheli az előtte levőt.

Megoldás: aktív leválasztás (erősítők) — ezért előnyösek az aktív RC szűrők.

Analóg szűrő alaptagok

RC tagok: 1 ellenállás és kapacitás — elsőrendű alaptag

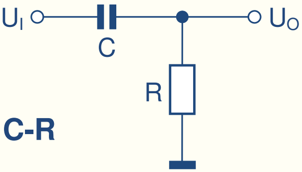


$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

LP karakterisztika

RC tagok: 1 ellenállás és kapacitás — elsőrendű alaptag

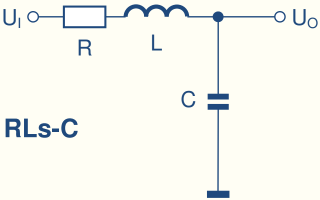


$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

HP karakterisztika

RLC tagok: 1 ellenállás, induktivitás és kapacitás — másodrendű alaptag



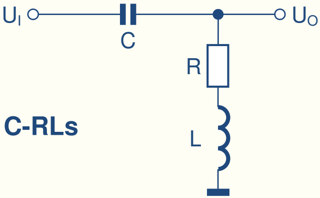
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

LP karakterisztika

Analóg szűrő alaptagok

RLC tagok: 1 ellenállás, induktivitás és kapacitás — másodrendű alaptag



C-RLs

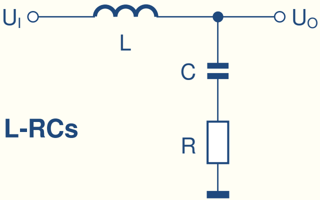
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{R + sL}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{LCs^2 + RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

HP karakterisztika

Analóg szűrő alaptagok

RLC tagok: 1 ellenállás, induktivitás és kapacitás — másodrendű alaptag



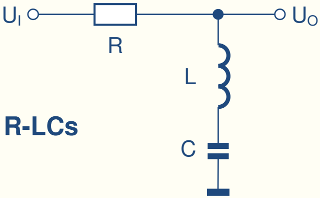
L-RCs

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{R + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{RCs + 1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

LP karakterisztika

RLC tagok: 1 ellenállás, induktivitás és kapacitás — másodrendű alaptag

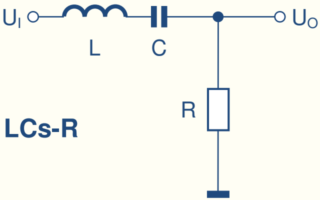


$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{LCs^2 + 1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

BS karakterisztika

RLC tagok: 1 ellenállás, induktivitás és kapacitás — másodrendű alaptag

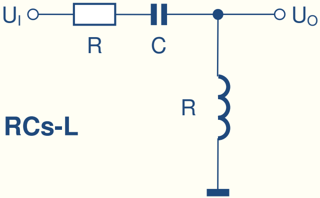


$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

BP karakterisztika

RLC tagok: 1 ellenállás, induktivitás és kapacitás — másodrendű alaptag



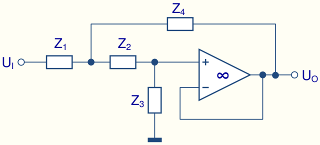
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{sL}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1}$$

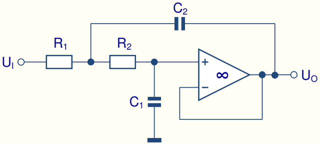
HP karakterisztika

Sallen-Key architektúra

Egy gyakorlatban előnyösnek bizonyult realizáció:

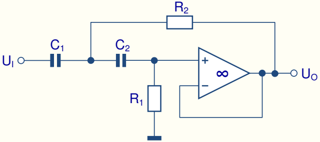


$$\frac{V_O}{V_I} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2) + Z_3 Z_4}$$



Aluláteresztő (LP) szűrő:

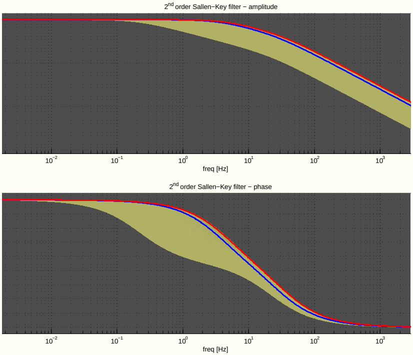
$$\frac{V_O}{V_I} = \frac{C_1 C_2}{R_1 R_2 s^2 + C_2(R_1 + R_2)s + C_1 C_2}$$



Felüláteresztő (HP) szűrő:

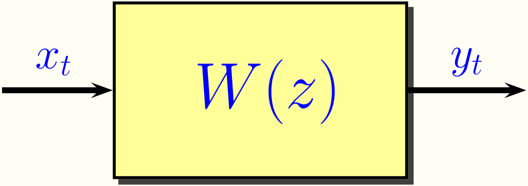
$$\frac{V_O}{V_I} = \frac{R_1 R_2 s^2}{R_1 R_2 s^2 + R_2(C_1 + C_2)s + C_1 C_2}$$

Sallen-Key architektúra — tolerancia-érzékenység



Digitális szűrők

Diszkrét idejű lineáris rendszerekkel realizált szűrők: bemeneti és kimeneti jeleik numerikus sorozatok.



Időtartománybeli leírás:

- $\{w_t\}$ súlyfüggvény (súlysorozat) – $\{y_t\} = \{w_t\} * \{x_t\}$

Frekvenciatartománybeli leírás:

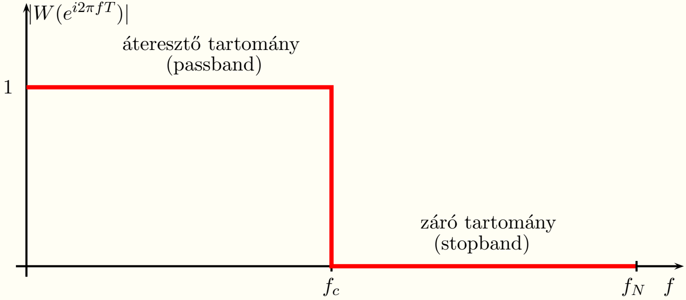
- $W(z)$ impulzusátviteli függvény az egységkörön értelmezve:

$$z = e^{\mathrm{i}\,2\pi f T} \qquad 0 < f \leq f_N \text{ a fizikailag értelmezhető tartomány}$$

T a mintavételi periódusidő, $f_s = 1/T$ a mintavételi frekvencia, $f_N = f_s/2$ az un. Nyquist–frekvencia.

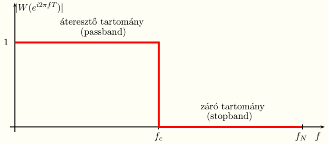
Az ideális LP szűrő karakterisztikája:

Amplitudó-karakterisztika:



Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Vajon megvalósítható a gyakorlatban az ideális szűrő karakterisztika?



Példa: LP szűrő

A lehetséges módszer:

- A bemeneti jelet Fourier-transzformáljuk,
- Az áteresztősávban meghagyjuk, a zárósávban nullázzuk a spektrum-értékeket.
- Inverz Fourier-transzformációval kapjuk a szűrt kimeneti jelet.

Ideális szűrőt kapunk? Nem, mert a Fourier-transzformációt csak véges mintára, közelítéssel tudjuk végrehajtani.

Mikor alkalmazható a módszer? Ha az egész minta rendelkezésre áll, azaz off-line alkalmazáskor. Valós idejű alkalmazáshoz nem jó.

Digitális aluláteresztő szűrő

Az ideális LP szűrő súlyfüggvénye: az impulzusátviteli függvény inverz Fourier–transzformáltja ($-\infty < n < \infty$):

$$w_n = \int_{-f_c}^{f_c} e^{\mathtt{i}\,2\pi f nT}\,df = \left[\frac{e^{\mathtt{i}\,2\pi f nT}}{\mathtt{i}\,2\pi nT}\right]_{-f_c}^{f_c} =$$

$$= \left[\frac{e^{\mathtt{i}\,2\pi f_c nT} - e^{-\,\mathtt{i}\,2\pi f_c nT}}{\mathtt{i}\,2\pi nT}\right] = \frac{\sin \pi f_c/f_N n}{\pi/f_N n}$$

Egy végtelen sorozat — nyilvánvalóan csak véges approximációi alkalmazhatók a gyakorlatban.

Gyakorlati megjelenési formája a módszernek: valamilyen ablakfüggvényből indulunk ki, annak inverz Fourier-transzformáltját határozzuk meg véges terjedelemben.

Digitális szűrők

Frekvenciatartomány (érvényességi tartomány):

Mivel a digitális szűrők átviteli tartományát az $f_N = f_s/2$ Nyquist frekvenciáig értelmezzük, gyakori az relatív (vahgy normalizált) frekvencia alkalmazása:

$$\varphi = f/f_N \quad (0 \leq f \leq f_N) \quad \text{relatív frekvencia — } 0 \leq \phi \leq 1$$

φ független az aktuális mintavételi frekvenciától, a tényleges szűrési frekvenciatartomány az alkalmazott mintavételi frekvenciától függ.

Digitális szűrő típusok

A szűrők alapvető típusai:

- Véges impulzusválaszú (FIR — Finite Impulse-Response) szűrők: $\{w_t\}$ véges számú elemet tartalmaz.
- Végtelen impulzusválaszú (IIR — Infinite Impulse-Response) szűrők: $\{w_t\}$ végtelen sorozat.

FIR szűrők

Véges impulzusválaszú (FIR — Finite Impulse-Response) szűrők:
$\{w_t\}$ véges számú elemet tartalmaz.

Általános kifejezése (időtartomány):

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \beta_m x_{t-m}$$

- A bemeneti jel véges számú minta-értékének súlyozott átlaga.
- Mozgóátlag szűrő: folyamatosan, minden mintapontra átlapolással működik.
- Decimáló szűrő: m bemeneti adatonként szolgáltat egy kimeneti értéket.

FIR szűrők

Példák:

- Egyszerű N-pontos aritmetikai átlag:

$$y_t = \frac{x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \cdots + x_{t-N+1}}{N} \qquad \beta_i = \frac{1}{N}$$

- N-pontos átlag lineáris felejtéssel:

$$y_t = \frac{x_t + (1-\alpha)x_{t-1} + (1-2\alpha)x_{t-2} + \cdots + (1-(N-1)\alpha)x_{t-N+1}}{1 + (1-\alpha) + (1-2\alpha) + \ldots (1-(N-1)\alpha)}$$

- N-pontos átlag exponenciális felejtéssel:

$$y_t = \frac{x_t + (1-\alpha)x_{t-1} + (1-\alpha)^2 x_{t-2} + \cdots + (1-\alpha)^{N-1} x_{t-N+1}}{1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \ldots (1-\alpha)^{N-1}}$$

FIR szűrők

A FIR szűrő előnyei:

- Egyszerű szerkezet, könnyű realizálhatóság.
- Minden esetben stabil.
- Nem érzékeny a kerekítési hibákra.

A FIR szűrő hátrányai:

- Kis szűrési meredekség.
- Erősen hullámzó zárótartomány.
- Némi késleltetés.

IIR szűrők

Végtelen impulzusválaszú (IIR — Infinite Impulse-Response) szűrők: $\{w_t\}$ végtelen számú elemet tartalmaz.

Általános kifejezése — megvalósítása

$$
\begin{aligned}
y_t = & -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_n y_{t-n} + \\
& + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \beta_m x_{t-m}
\end{aligned}
$$

Optimális realizáció digitális számítógépekben:

- Különböző sémák: kaszkád elrendezés (első- és másodrendű alaptagok), létrahálózat, stb.
- Optimalizálás minimális műveletszámra, tárolóhelyre, adatmozgatásra.

IIR szűrők

Az IIR szűrő előnyei:

- Elérhető nagy meredekség, tervezhető csillapítás és hullámzás.
- A jól megtervezett szűrő stabil és nem érzékeny a kerekítési hibákra.

Az IIR szűrő hátrányai:

- Realizálási korlátok miatt előfordulhat instabilitás, érzékenység kerekítési hibákra .
- Bonyolultabb szerkezet, nagyobb számítástechnikai kapacitásigény.
- A nagyobb meredekség nagyobb késleltetéssel jár.