A jelfeldolgozás alapjai

DR. SOUMELIDIS ALEXANDROS

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

MŰEGYETEM 1782

Budapest, 2016. november

Tartalomjegyzék

A becslések hibái

Jelek paramétereinek meghatározása:

- Pontosan általában nem határozhatók meg, a jelfeldolgozási módszerek általában **hibá**val terheltek.
- A jelfeldolgozási módszerek általában **becslések**.
- A hibák okai (a teljesség igénye nélkül): sztochasztikus jelleg, zajok, véges mintaregisztrátum, véges számábrázolási pontosság

$x \quad \rightarrowtail \quad$ valódi érték $\quad \hat{x} \quad \rightarrowtail \quad$ becsült érték

Az eltérés kifejezése:

$$\begin{aligned} \Delta x = x - \hat{x} & \quad \text{egyszerű különbség} \\ |\Delta x| = |x - \hat{x}| & \quad \text{abszolút hiba} \\ MSE[\hat{x}] = E[(x - \hat{x})^2] & \quad \text{négyzetes középhiba} \end{aligned}$$

A becslések hibái

A négyzetes középhiba (**M**ean-**S**quare **E**rror):

$$MSE[\hat{x}] = E[(x - \hat{x})^2]$$

A becsült érték általában ismeretlen hibával terhelt — valószínűségi változónak tekinthető.

A négyzetes középhiba alkalmazásának indokai:

- Igen régi fogalom — "legkisebb négyzetek" (Least Square - LS) elve — Carl Friedrich Gauss a XVIII-XIX. század.
- Az átlagos négyzetes eltérés energia jellegű mennyiség, közel áll az L^2 normához. Az L^2-térbeli skaláris szorzat révén definiálható a merőlegesség fogalma.
- A négyzetes kifejezésekkel egyszerű számolni — folytonos differenciálhatóság — optimalizálás.

A becslések hibái

A becslés négyzetes középhibája:

$$MSE[\hat{x}] = E[(x-\hat{x})^2] = E[(x - E[\hat{x}] + E[\hat{x}] - \hat{x})^2] =$$

elvégezzük a négyzetreemelést és tagonként vesszük $E[.]$-t

$$= E[(x - E[\hat{x}])^2] + 2E[(x - E[\hat{x}])(E[\hat{x}] - \hat{x})] + E[(E[\hat{x}] - \hat{x})^2]$$

A középső tag:

$$\begin{aligned} E[(x - E[\hat{x}])(E[\hat{x}] - \hat{x})] &= E[xE[\hat{x}] - E[\hat{x}]E[\hat{x}] - x\hat{x} + E[\hat{x}]\hat{x}] = \\ &= E[x]E[\hat{x}] - E[\hat{x}]E[\hat{x}] - E[x\hat{x}] + E[\hat{x}]E[\hat{x}] = \\ &= E[x]E[\hat{x}] - E[x\hat{x}] \end{aligned}$$

A becsült érték statisztikai értelemben független az eredeti értéktől, így

$$E[x\hat{x}] = E[x]E[\hat{x}] \qquad \Rightarrow \qquad \text{a középső tag } 0.$$

A becslések hibái

Tehát

$$MSE[\hat{x}] = \underbrace{E[(x - E[\hat{x}])^2]} + \underbrace{E[(\hat{x} - E[\hat{x}])^2]}$$

A becsült érték várható értékének eltérése a valóságostól:

torzítás (bias)

A becsült érték eltérése saját várható értékétől:

variancia

A négyzetes középhiba felbontása:

$$\begin{aligned} MSE[\hat{x}] &= b^2[\hat{x}] + var[\hat{x}] = \\ &= b^2[\hat{x}] + \sigma^2[\hat{x}] \end{aligned}$$

torzítási hiba és variancia hiba összege,

illetve a négyzetgyökére – RMS (**R**oot–**M**ean–**S**quare) –

$$RMS[\hat{x}] = \sqrt{b^2[\hat{x}] + var[\hat{x}]}$$

A becslések hibái

Torzítás

$$b[\hat{x}] = \sqrt{E[(x - E[\hat{x}])^2]}$$

A hiba determinisztikus része, azonos feltételek mellett mindig ugyanaz:

- Ha nagysága ismert: *rendszeres hiba*, korrigálni lehet.
- Sok esetben nem ismert: ismeretlen feltételek, tekintetbe nem vett (nem modellezett) hatások eredményeként keletkezik.

Variancia ill. **szórás**

$$var[\hat{x}] = E[(\hat{x} - E[\hat{x}])^2] \quad \sigma[\hat{x}] = \sqrt{E[(\hat{x} - E[\hat{x}])^2]}$$

A hiba véletlen komponense, a becslés minden realizációjában különböző.

A becslések tulajdonságai

A becslés jóságát kifejező jellemzők:

Torzítatlan becslés (unbiased)

$$E[\hat{x}] = x$$

Hatásosság (efficiency) Legyen $\hat{x}_1$ és $\hat{x}_2$ két becslése x paraméternek.

$\hat{x}_1$ hatásosabb becslés, mint $\hat{x}_2$, ha

$$E[(\hat{x}_1 - x)^2] < E[(\hat{x}_2 - x)^2]$$

Konzisztencia Egy becslés konzisztens, ha N minta-terjedelmet tekintve

$$\lim_{N\to\infty} P[|\hat{x} - x| \geq \varepsilon] = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

Tehát egy becslés akkor konzisztens, ha növekvő mintanagyságra a hiba 0-tól való eltérésének valószínűsége egyre kisebb (erős konzisztencia).

Jel középértékének becslése véges N mintaterjedelemre:

$$\bar{x} = E[x] \quad \Rightarrow \quad \hat{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Konzisztencia $\leftarrow$ központi határeloszlás tétel.

Jel varianciájának becslése véges N mintaterjedelemre:

$$var[x] = \sigma_x^2 = E[(x - E[x])^2] \quad \Rightarrow \quad \widehat{var[x]} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \hat{\bar{x}})^2$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Konzisztencia $\leftarrow$ központi határeloszlás tétel.

Azonban: ismeretlen középérték esetén nem használható.

Becslési eljárások: középérték és variancia

Ha a középértéket torzítatlan becslésével vesszük figyelembe:

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j)^2$$

$$E[s_x^2] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[(x_k - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j)^2]$$

Vezessük be a következő jelölést: $x = \tilde{x} + \bar{x}$, ahol $\bar{x}$ a középérték,

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[(\tilde{x}_k + \bar{x} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{x}_j + \bar{x}))^2] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[(\tilde{x}_k - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{x}_j)^2] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\{E[\tilde{x}_k^2] - \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}E[\tilde{x}_k\tilde{x}_j] + \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}E[\tilde{x}_i\tilde{x}_j]\right\}$$

A mérési adatok függetlensége miatt $E[\tilde{x}_i\tilde{x}_j] = \delta_{ij}\sigma_x^2$, ahol

$\delta_{ij} = \{1,\ \text{ha } i = j,\ 0 \text{ egyébként}\}$ a Kronecker δ szimbólum.

Becslési eljárások: középérték és variancia

Tehát

$$E[s_x^2] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sigma_x^2\left\{1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N}\right\} = \frac{N-1}{N}\sigma_x^2,$$

ami egy torzított becslése a varianciának.

Torzítás: ismert rendszeres hiba – korrigálható, $\frac{N}{N-1}$-szeresét véve.

A minta–variancia empírikus becslése véges N mintaterjedelemre:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\hat{\hat{x}})^2, \quad \text{ahol} \quad \hat{\hat{x}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k.$$

Ez már torzítatlan (és konzisztens) becslés.

Autokorreláció-függvény becslése:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad \Rightarrow \quad \hat{R}_x(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k}$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Az autokorreláció-függvény páros, így

$$\hat{R}_x(|k|) = \frac{1}{N-|k|}\sum_{j=1}^{N-|k|} x_j x_{j+|k|}$$

is igaz, azaz kiszámítjuk a pozitív felét, és tükrözzük $k=0$ körül.

Egy torzított, de a gyakorlat számára jelentős becslés:

$$\hat{R}_x(|k|) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+|k|}$$

$$E[\hat{R}_x(|k|)] = \left(1-\frac{|k|}{N}\right)R_x(k) \quad \text{háromszögletű "ablakkal" szorzott}$$

Becslési eljárások: korreláció-függvények

Autokovariancia függvény becslése:

$$C_x(\tau) = E[(x(t) - \bar{x})(x(t+\tau) - \bar{x})] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \hat{C}_x(|k|) = \frac{1}{N - |k|} \sum_{j=1}^{N-k} (x_j - \hat{\bar{x}})(x_{j+|k|} - \hat{\bar{x}})$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Egy torzított becslés:

$$\hat{C}_x(|k|) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-k} (x_j - \hat{\bar{x}})(x_{j+|k|} - \hat{\bar{x}})$$

$$E[\hat{C}_x(|k|)] = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) C_x(k)$$ háromszögletű "ablakkal" szorzott

Becslési eljárások: korreláció-függvények

Kereszt-kovariancia függvény becslése: $2N+1$ minta-terjedelemre

$$C_{xy}(\tau) = E[(x(t)-\bar{x})(y(t+\tau)-\bar{y})] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \hat{C}_{xy}(k) = \frac{1}{2N-k+1} \sum_{j=-N+k}^{N-k} (x_j - \hat{\bar{x}})(y_{j+k} - \hat{\bar{y}})$$

Nem páros függvény! Torzítatlan konzisztens becslés.

Hasonlóan az előzőköz: torzított becslés, keresztkorreláció becslés.

Becslési eljárások: korreláció-függvények

A korreláció-becslésekről általában:

$$\frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k}$$

igen munkaigényes eljárások, N^2-tel arányos számú szorzás és összeadás.

A gyakorlatban inkább kerüljük a kiszámításukat.

Gyakorlatban inkább megvalósítható eljárás: lásd később.

A Fourier-transzformáció diszkretizálása

Kiidulás:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t}\, dt$$

1. lépés: véges mintaregisztrátum – T időtartam

$$X(f) \cong \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f t}\, dt$$

2. lépés: Δt periódussal mintavétel, legyen $T = n\Delta t$

$$X(f) \cong \Delta t \sum_{j=-N/2}^{N/2} x(j\Delta t) e^{-i2\pi f j \Delta t}$$

az integrálást véges szummával helyettesítjük

A Fourier-transzformáció diszkretizálása

3. lépés: frekvenciában is mintavételezünk: $[-f_N, -f_N)$ tartományban N minta

A véges Fourier-transzformált periodikus: $[-f_N, f_N)$ tartomány egy periódusnak felel meg. f_N — Nyquist frekvencia

$$\Delta f = 2f_N/N \quad 2f_N\Delta t = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$$

A diszkrét frekvenciapontokat $f_k = k\Delta f$-val, az időpontokat $t_j = j\Delta t$-val jelölve:

$$X(f_k) = \Delta t \sum_{j=-N/2}^{N/2} x(t_j) e^{-i2\pi\frac{jk}{N}} \quad (k = -N/2, \ldots, 0, \ldots, N/2-1)$$

Ezt a formát nevezzük **diszkrét Fourier-transzformáltnak**.

A Fourier-transzformáció diszkretizálása

A gyakorlatban sok esetben $k = 0, 1, \dots, N-1$ indexelést alkalmazunk. Ekkor

$$X_k = \Delta t \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} x_j e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad \ell = j + N/2 \text{ helyettesítéssel}$$

$$X_k = \Delta t \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{\ell-N/2} e^{-i2\pi \frac{(\ell-N/2)k}{N}} = e^{i2\pi \frac{k}{2}} \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x_{\ell-N/2} e^{-i2\pi \frac{\ell k}{N}}$$

Ez egyenértékű $N/2$ mintával való időtartománybeli eltolással, ill. a kiszámított spektrum jobb- és baloldali felének felcserélésével.

A gyors Fourier-transzformáció

A diszkrét Fourier-transzformáció,

$$X_k = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

kiszámítása N^2 műveletet (szorzás–összeadás együttese) igényel.

Bizonyos szimmetriák figyelembevételével ez $N \log_2 N$ műveletre redukálható:

gyors Fourier-transzformáció
Fast Fourier-Transform – FFT

A gyors Fourier-transzformáció

Gyorsítás: a műveletek számának csökkentése – FFT algoritmus.

Történelem: a köztudat szerint **J. W. Cooley** és **J. W. Tukey** dolgozta ki első formáját **1965**-ben,

azonban kiderült: **Carl Friedrich Gauss 1805** környékén már alkalmazott hasonló elvek alapján felépülő algoritmust.

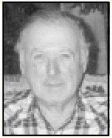
Cooley-Tukey algoritmus:

oszd meg és uralkodj elv — kisebb egységekre osztjuk a számítandókat és közös részeket figyelembe véve csökken a számításigény.

Cooley-Tukey algoritmus

A Cooley-Tukey-féle FFT algoritmust a XX. század 10 legjelentősebb algoritmusai közé választották

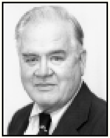
(Computing in Science and Engineering, 2000)



James Cooley

1965: James Cooley of the IBM T.J. Watson Research Center and John Tukey of Princeton University and AT&T Bell Laboratories unveil the **fast Fourier transform**.

Easily the most far-reaching algo-rithm in applied mathematics, the FFT revolutionized signal processing. The underlying idea goes back to Gauss (who needed to calculate orbits of asteroids), but it was the Cooley–Tukey paper that made it clear how easily Fourier transforms can be computed. Like Quicksort, the FFT relies on a divide-and-conquer strategy to reduce an ostensibly $O(N^2)$ chore to an $O(N \log N)$ frolic. But unlike Quick- sort, the implementation is (at first sight) nonintuitive and less than straightforward. This in itself gave computer science an impetus to investigate the inherent complexity of computational problems and algorithms.



John Tukey

Cooley-Tukey algoritmus

A legegyszerűbb esettel foglalkozunk (Cooley és Tukey eredetileg általánosabb esetet írt le).

Tegyük fel, hogy N 2 egész hatványa, azaz $N = 2^p$, ahol $p \in \mathbb{N}$.

Válasszuk szét a bemeneti adatokat két egyenlő részre — páros indexű, és páratlan indexű elemekre:

$$X_n = \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_{2\ell} e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}(2\ell)\,n} + \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_{2\ell+1} e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}(2\ell+1)\,n} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_{2\ell} e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N/2}\ell\,n}}_{\substack{\text{a páros indexű elemek} \\ N/2 \text{ méretű DFT-je}}} + e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}n} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_{2\ell+1} e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N/2}\ell\,n}}_{\substack{\text{a páratlan indexű elemek} \\ N/2 \text{ méretű DFT-je}}}$$

Cooley-Tukey algoritmus

Jelöljük a páros illetve páratlan indexű elemekre vonatkozó DFT-ket az angol *odd* és *even* kifejezések alapján E_n-val illetve O_n-val, ezekkel

$$X_n = E_n + e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}n} O_n$$

Az $N/2$ méretű DFT az n indexben $N/2$ szerint periodikus sorozat, így elegendő E_n és O_n tagokat a $0 \le n < \frac{N}{2}$ indexekre kiszámolni, mivel

$$E_{n+N/2} = E_n \qquad O_{n+N/2} = O_n \qquad \left(n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1\right)$$

Ugyanakkor az O_n tag szorzótényezőjére

$$e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}(n+\frac{N}{2})} = e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}n} e^{-\mathtt{i}\,\pi} = -e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}n}$$

érvényes.

Cooley-Tukey algoritmus

Ezeknek megfelelően a DFT értéke $k = 0, 1, \ldots, N-1$ indexekre

$$X_n = \begin{cases} E_n + e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}n} O_n & \text{ha } 0 \le n < \frac{N}{2} \\ E_{n-\frac{N}{2}} - e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}(n-\frac{N}{2})} O_{n-\frac{N}{2}} & \text{ha } \frac{N}{2} \le n < N \end{cases}$$

lesz. Kiszámításához N művelet szükséges.

Ha folytatjuk az eljárást: az $N/2$ méretű DFT-ket felosztjuk két $N/4$ méretű DFT-re — ezek kiszámítására is N művelet szükséges.

Iteratívan folytatjuk az eljárást az egyedi elemek szintjéig: minden szint N műveletet igényel. A szintek száma: $\log_2 N$.

Az igényelt összes művelet száma:

$$\text{(szintek száma)} \times \text{(az egy szinten elvégzendő műveletek száma)}$$

$$\log_2 N \times N.$$

Cooley-Tukey algoritmus

A gyors Fourier-transzformáció (FFT) megvalósításához szükséges műveletek száma:

$$N \log_2 N$$

Az ismertetett eljárást az alkalmazott felezési stratégia miatt **Radix-2** eljárásnak nevezzük.

Radix: a felosztás rendje — jelen esetben 2.

Nem ez a leghatékonyabban realizálható eljárás:

- a *Radix-4* algoritmus — 4 csoportba osztás,
- változó alapú (*mixed radix*) algoritmusok

hatékonyabbak. Utóbbi alkalmazható, ha N nem egész hatványa 2-nek.

Cooley-Tukey algoritmus

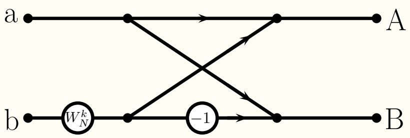
Az előzőkben definiált DFT sémában sűrűn előforduló forma

$$A = a + w_N^n b$$
$$B = a - w_N^n b$$

ahol

$$w_N = e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{N}} \quad \text{az } N\text{-dik egységgyök.}$$

Elnevezése: **butterfly** — pillangó

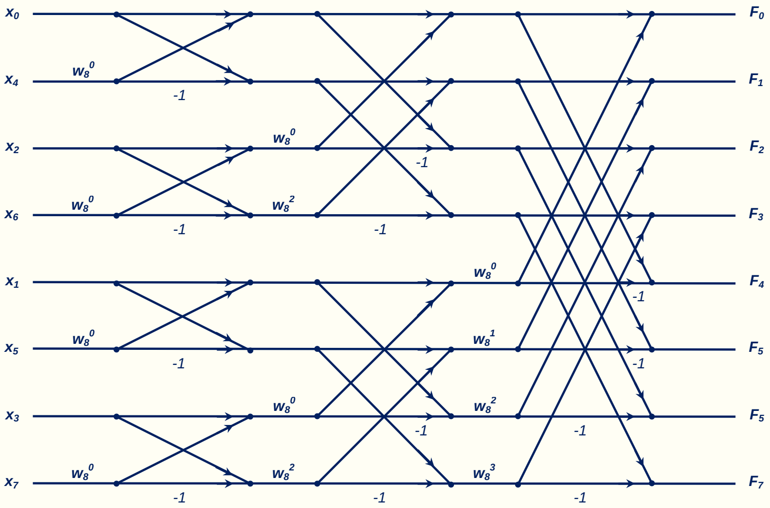


A w_N^n szorzót "twiddle" faktornak is nevezik —

(twiddle = babrálni, bütykölni).

Cooley-Tukey algoritmus

8-pontos FFT (Radix-2, Decimation–In–Time (DIT) séma)



A spektrumbecslés gyakorlata

Auto-teljesítménysűrűség függvény becslése

Definíció szerinti módszer

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-\,\mathrm{i}\,2\pi f \tau}\, d\tau \quad \text{ahol} \quad R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

véges 2N mintatejedelemre:

- Az autokorreláció (autokovariancia) függvény becslése

$$\hat{R}_x(|k|) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{j=1}^{N-|k|} x_j x_{j+|k|}$$

- Diszkrét Fourier-transzformáció végrehajtása - FFT

$$G_x(k) = \Delta t \sum_{j=-N}^{N-1} \hat{R}_x(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad k = -N, \ldots, 0, \ldots, N-1$$

Torzított, de konzisztens becslés.

A véges mintaregisztrátum hatása

Végtelen határok helyett a gyakorlatban:

$$G_x(f) = \int_{-T}^{T} R_x(\tau) e^{-\mathtt{i}\, 2\pi f \tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(\tau) R_x(\tau) e^{-\mathtt{i}\, 2\pi f \tau}\, d\tau$$

ahol $w_T(\tau)$ egy un. ablakfüggvény:

- véges kiterjedésű (véges tartójú),
- korlátos függvény.

Aktuálisan itt: négyszögletes ablakfüggvény.

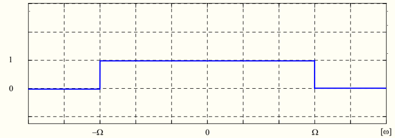
Ablakfüggvénnyel való szorzás időtartományban ⇒

konvolúció a Fourier-transzformáltakra:

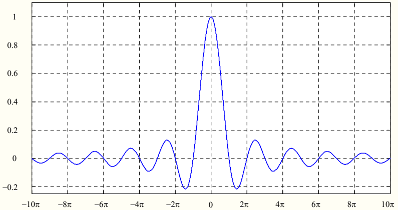
$$\hat{G}_x(f) = W_T(f) * G_x(f)$$

ezért **torzított** a teljesítménysűrűség függvény becslése.

A négyszögletes ablak



A négyszögletes ablak Fourier-transzformáltja:



Ha az ablak terjedelme végtelen fele tart: a Fourier-transzformált a $\delta(\omega)$ — a konvolúció a pontos Fourier-transzformáltat állítja elő $\rightarrow$ konzisztencia

Az ablakfüggvény hatása:

- Torzítás: megváltozik a függvény alakja: a csúcsok kiszélesednek, magasságuk csökken.
- Oldalági szivárgás (sidelob leakage): az oldalágakon 0-tól különböző érték, hullámzás.
- Csökken a felbontóképesség: összeolvadnak a szomszédos csúcsok.

Az ablakfüggvény hatásának csökkentése:

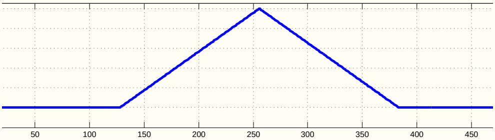
- Válasszunk minél nagyobb mintaterjedelmet — konzisztencia: a nagyobb minta csökkenti a torzítást.
- Válasszunk a négyszögletestől eltérő ablakfüggvényt.

Egy kézenfekvő választás: az autokorreláció függvény torzított becslése —

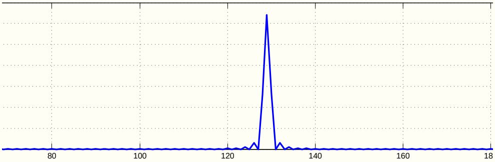
háromszögletű ablakot eredményez.

Speciális ablakfüggvények:

Háromszögletű ablak



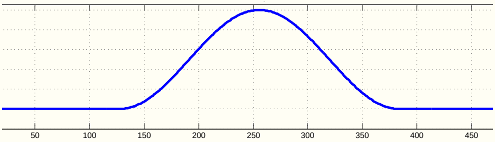
A háromszögletű ablak Fourier-transzformáltja:



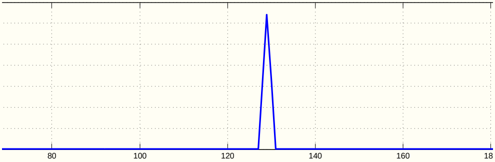
Speciális ablakfüggvények:

Hanning ablak

$$w(n) = 0.62 - 0.48\left|\frac{n}{N} - 0.5\right| + 0.38\cos\left(2\pi\left(\frac{n}{N} - 0.5\right)\right)$$



A Hanning ablak Fourier-transzformáltja:



A spektrumbecslés gyakorlata

Auto-teljesítménysűrűség függvény becslése

Direkt Fourier-transzformációs (periodogramm) módszer

$$\hat{G}_x(f) = \frac{1}{T}|X(f)|^2$$

Torzított, de konzisztens becslés.

Előnyei:

- Nincs szükség az autokorreláció-függvény előzetes becslésére.
- Hatékony, gyors algoritmussal — FFT-vel — számítható.

Hátrányai:

- Torzítás — nem rosszabb, mint a definíció szerinti módszer.
- Variancia — nagyon nagy — relatív variancia 1, a módszer önmagában használhatatlan.

A spektrumbecslés gyakorlata

Direkt Fourier-transzformációs (periodogramm) módszer

Torzítás

$$E[\hat{G}_x(f)] = E[\frac{1}{T}|X(f)|^2] = \frac{1}{T}E\left[\int_0^T x(u)e^{i\omega u}du \int_0^T x(v)e^{-i\omega v}dv\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^T E[x(u)x(v)]e^{i\omega u}e^{-i\omega v}du\,dv =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^T R_x(u-v)e^{i\omega u}e^{-i\omega v}du\,dv$$

Vezessük be a $\tau = u - v$ helyettesítést, uj változók τ és u.

A spektrumbecslés gyakorlata

$$= \frac{1}{T}\left\{\int_{-T}^{0}\int_{-\tau}^{T} R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}du\,d\tau + \int_{0}^{T}\int_{0}^{T-\tau} R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}du\,d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\int_{-T}^{0}((T+\tau)R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}du\,d\tau + \int_{0}^{T}(T-\tau)R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}du\,d\tau\right\} =$$

$$= \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

azaz

$$E[\hat{G}_x(f)] = \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

ami egy háromszögletű ablakkal való szorzást jelent — torzított becslés.

Direkt Fourier-transzformációs (periodogramm) módszer

Variancia

- Kimutatható, hogy a becslés N-szabadságfokú χ^2 eloszlást mutat, ha az eredeti jel normális eloszlású — ennek relatív varianciája 1.
- A variancia a csökkentésének módja: átlagolás. Több minta $(10\text{-}100)$ spektrumának átlagát képezzük.

A direkt Fourier-transzformációs módszert mindig átlagolással használjuk.

Korreláció-függvény becslés

Egy hatékony gyakorlati módszer a korreláció-függvény becslésére:

- A jel teljesítménysűrűség függvényének becslése direkt módszerrel.
- A teljesítménysűrűség függvény inverz Fourier-transzformáltjának meghatározása.

Előnyei:

- Csak FFT kerül alkalmazásra — gyors, minimális műveletszám.
- A torzítás nem rosszabb, mint a hagyományos módszer esetén.