# A jelfeldolgozás alapjai


**DR. SOUMELIDIS ALEXANDROS**

**Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék**


Budapest, 2016. október

# Tartalomjegyzék

# Tranziens jelek osztálya

Nem-periodikus – "tranziens" jelek:

$f(t)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amelyek értelmezési tartományukban korlátosak, vagy valamilyen $p$-re $(0 < p < \infty)$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \, dt$$

integrál létezik és véges értékű.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \, dt \quad \text{egy } f(t)\text{-re alkalmazott } \textit{norma},$$

$f$ függvények tere egy *normált lineáris tér*.

# Lineáris tér / vektortér

## Definíció

*$\mathcal{V}$ lineáris vektortér* **vektoroknak** *nevezett elemek olyan halmaza, amelyre $\mathbb{F}$ skalár testtel kapcsolatban teljesülnek az alábbi axiómák:*

1. *Létezik egy* **összeadás***nak nevezett művelet, amely minden $(x, y) \in \mathcal{V}$ párhoz hozzárendel egy* **összegnek** *nevezett $x + y$ vektort, hogy*
    1. *az összeadás kommutatív, $x + y = y + x$,*
    2. *az összeadás asszociatív, $x + (y + z) = (x + y) + z$,*
    3. *$\exists$ egyetlen $0$ vektor, hogy $\forall\ x \in \mathcal{V}$-re $x + 0 = x$,*
    4. *$\forall\ x \in \mathcal{V}$-hez $\exists$ egyetlen $-x$ vektor, hogy $x + (-x) = 0$.*
2. *Létezik egy* **skalárral való szorzás***nak nevezett művelet, amely minden $\alpha \in \mathbb{F}$ skalárból és $x \in \mathcal{V}$ vektorból álló párhoz hozzárendeli az $\alpha$ és $x$* **szorzat***ának nevezett $\alpha x$ vektort úgy, hogy*
    1. *a skalárral való szorzás asszociatív, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,*
    2. *$\forall\ x \in \mathcal{V}$-re $1x = x$.*
3. *Az összeadás és a skalárral való szorzás disztributív:*
    1. *$\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$,*
    2. *$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.*

# Lineáris kombináció

**Definíció**

*Egy $\mathcal{V}$ vektortérből vett $\{x_i\}$ vektorok lineáris kombinációjának az $\mathbb{F}$ testből vett $\{\alpha_i\}$ skalárokkal képzett*

$$\sum_i \alpha_i x_i$$

*vektort értjük.*

A lineáris kombináció (lineárkombináció) vonatkozhat véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok elemre.

# Lineáris függés, függetlenség

## Definíció

*Vektorok véges $\{x_i\}$ halmazát akkor nevezzük* **lineárisan függetlennek**, *ha a $0$-vektor $0$ együtthatókkal állítható elő az $\{x_i\}$ vektorok lineárkombinációjaként, azaz*

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0$$

*esetén minden $i$ indexre $\alpha_i = 0$, továbbá akkor nevezzük* **lineárisan összefüggőnek**, *ha a lineárkombináció nem minden $\alpha_i$ együtthatója $0$.*

A lineáris függetlenség fogalma kiterjeszthető végtelen halmazokra:

Egy $\mathcal{V}$ halmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független vektorokból áll.

# Bázis

A bázis lényegében egy koordináta rendszer valamely vektortérben, lehetővé teszi, hogy a tér vektoraihoz numerikus értékeket tudjunk rendelni, és azokkal számolni.

## Definíció

*A $\mathcal{X}$ lineárisan független halmazt* ***bázis****nak nevezünk a $\mathcal{V}$ vektortérben, ha $\mathcal{V}$ minden eleme előállítható $\mathcal{X}$ lineáris kombinációjaként.*

A $\mathcal{V}$ vektorteret **véges dimenziós**nak mondunk, ha van véges bázisa.

A bázis elemeinek száma a vektortér **dimenziója**.

# Bázisok tulajdonságai

Néhány fontos állítás (tétel) a véges dimenziós vektorterek köréből:

- Véges dimenziós vektortér tetszőleges vektora egyértelműen kifejezhető bázisának lineárkombinációjaként.
- Véges dimenziós vektortérben minden lineárisan független halmaz kiegészíthető bázissá.
- Tetszőleges véges dimenziós vektortér bármely két bázisa ugyanannyi elemet tartalmaz.
- Egy $n$-dimenziós $\mathcal{V}$ vektortérben $n+1$ elem lineárisan összefüggő.
- Egy $n$-dimenziós $\mathcal{V}$ vektortérben egy $n$ elemű halmaz pontosan akkor bázis, ha lineárisan független.

Végtelen dimenziós lineáris terek:

- Nem feltétlenül találunk bázist.
- Ha találunk bázist, az megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz.
- Sok esetben több ekvivalens bázis is konstruálható.

# Metrikus tér

A *metrikus tér* egy vektortér, amelyen **távolságfogalmat – metrikát –** definiálunk.

**Távolság:**

## Definíció

*Távolságnak nevezzük az* $\mathcal{V}$ *vektortér elemein értelmezett*

$$d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

*valós értékű függvényt, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:*

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(háromszög egyenlőtlenség)*,

$x, y, z \in \mathcal{V}$ *elemekre.*

# Normált tér

A **normált tér** egy vektortér, amelyen **normát** definiálunk. A norma a vektortér elemein értelmezett valós értékű funkcionál.

Funkcionál: a lineáris tér minden vektorához hozzárendel egy skalárt.

**Norma:**

## Definíció

*Normának nevezzük az $\mathcal{V}$ vektortér elemein értelmezett valós funkcionált, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:*

1. $||x|| \geq 0$,
2. $||x|| = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $x = 0$,
3. $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$,
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$x, y \in \mathcal{V}$ *és* $\alpha \in \mathcal{F}$ *skalár értékekre.*

# Norma által indukált metrika

Egy normált tér egyben **metrikus** tér is a következő, **norma által indukált metriká**val:

$$d(x,y) = ||x-y|| \qquad x, y \in \mathcal{V}$$

A norma lényegében egy vektornak a $0$ vektortól vett távolsága.

A norma segítségével tudjuk definiálni pl.

- az eltérés,
- a környezet,
- a határérték,
- a konvergencia,
- a folytonosság

fogalmait.

# Belsőszorzat-terek

Egy lineáris térhez lehet definiálni un. belső szorzatot. A belső szorzattal ellátott tereket **belsőszorzat-terek**nek nevezzük.

## Definíció

*Belsőszorzat-tér egy $\mathcal{V}$ lineáris tér az $\mathbb{F}$ test felett, amelyben létezik egy*

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$$

*un. belső (vagy skaláris) szorzat a következő tulajdonságokkal:*

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
   $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$, *egyenlőség kizárólag, ha* $x = 0$,

$x, y, z \in \mathcal{V}$ *és* $\alpha \in \mathcal{F}$ *skalár értékekre.*

# Belsőszorzat-terek / normált terek

A belsőszorzat-terek egyben **normált** terek a következő belső szorzat által indukált **természetes normá**val:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Megfordítása nem igaz: nem minden normált tér belsőszorzat-tér.

Egy fontos tulajdonság: a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség.

**Tétel**

*Minden $x, y$ vektorra a $\mathcal{X}$ belsőszorzat-térben igaz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

*egyenlőséggel kizárólag, ha $x$ és $y$ lineárisan összefüggők.*

# Ortogonalitás

Az **ortogonalitás** (merőlegesség) fogalma a belső szorzattal kapcsolható össze:

## Definíció

*A $\mathcal{X}$ belsőszorzat-térhez tartozó $x$ és $y$ vektortorok ortogonálisak egymásra, ha*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Ortogonális vektorokra érvényes a Pithagorász-tétel:

## Tétel

*Ha $x, y \in \mathcal{X}$ vektorok ortogonálisak, azaz $\langle x, y \rangle = 0$, akkor*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

Ortogonális rendszerről beszélünk, ha a benne foglalt összes vektor páronként ortogonális.

# Ortogonális projekció

Fejezzük ki $v \in \mathcal{X}$ vektort a $\mathcal{X}$ tér egy $\{x_i\}$ bázisában:

$$v = \sum_i \alpha_i x_i$$

Képezzük belső szorzatát valamelyik $x_k$ báziselemmel:

$$\langle v, x_k \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i x_i, x_k \right\rangle = \sum_i \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle$$

Amennyiben az $\{x_i\}$ rendszer ortogonális (ortonormált), azaz minden $i, k \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\langle x_i, x_k \rangle = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (\delta_{ik} - Kronecker - delta)$$

$\langle v, x_k \rangle = \alpha_k$, azaz a lineárkombináció együtthatóit kapjuk.

Tetszőleges vektor előállítása ortogonális bázisban: **ortogonális projekció** a báziselemekre.

# Függvényterek – végtelen dimenziós terek

A lineáris tér vektorai: **függvények**.

Példa: az $L^p(\mathbb{R})$ terek $(0 < p <= \infty)$ – elemei $x(t)$ valós számegyenesen értelmezett függvények $(t \in \mathbb{R})$.

Tipikusan **normált terek**, $L^p(\mathbb{R})$ norma:

$$\|x\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} & \text{ha} \quad 0 < p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| & \text{ha} \quad p = \infty \end{cases}$$

**Teljesség**: a tér minden konvergens sorozata a tér valamely eleméhez konvergáljon, azaz a határérték ne vezessen ki a térből.

Teljes normált tér — **Banach-tér**.

Teljes belsőszorzat-tér — **Hilbert-tér**.

Bizonyíthatók a következő állítások:

- Az $L^p(\mathbb{R})$ terek Banach-terek.
- Az $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ tér Hilbert-tér.

# $L^p$ terek

- $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — az abszolút integrálható függvények tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt$$

teljes normált tér – Banach-tér.

- $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ — a négyzetesen integrálható függvények tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{\mathrm{L}^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt}$$

teljes normált tér — Banach-tér, továbbá teljes belsőszorzat-tér — Hilbert-tér a következő belső szorzattal:

$$\langle x, y\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

- $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ — a korlátos függvények tere

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| < \infty \quad \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \text{ tér, normája} \quad \|x\|_{\mathrm{L}^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$$

teljes normált tér — Banach-tér

# Tranziens jelek leírása

- $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — az **abszolút integrálható jelek** tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt$$

  egy Banach-tér.
- $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ — az **energiakorlátos jelek** tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{\mathrm{L}^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt}$$

  egy Hilbert-tér a következő belső (vagy skalár-) szorzattal:

$$\langle x, y \rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\, dt$$

- $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ — az **amplitudóban korlátos jelek** tere

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| < \infty \quad \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \text{ tér, normája} \quad \|x\|_{\mathrm{L}^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$$

  egy Banach-tér

# Az $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R})$ terek tulajdonságai

$f, g \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R})$ függvényekre

**Minkowski egyenlőtlenség** (a norma definíciója szerinti 4. axióma)

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

**Hölder egyenlőtlenség**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p(p-1)^{-1}}$$

Hilbert térben

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_{p(p-1)^{-1}}$$

**Schwartz egyenlőtlenség** (Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij)

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Hilbert térben

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

# A Fourier-transzformáció definíciója

## Definíció

*Az* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *függvény Fourier-transzformáltja*

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Az integrál nyilvánvalóan létezik, mivel $f(t)e^{-i\omega t}$ is $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$-beli függvény.

Egy $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ függvény Fourier-transzformáltja $\hat{f}(\omega)$ az $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ térbe tartozó függvény, azaz a Fourier-transzformáció $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ térből $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ térbe képez le:

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$$

Bizonyítása: triviális, a definíció szerinti integrál minden $\omega$-ra véges értékű, amelynek van maximuma.

# A Fourier-transzformáció néhány tulajdonsága

## Tétel

*Az $f$ függvény $\hat{f}(\omega)$ Fourier-transzformáltja egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-ben.*

## Bizonyítás.

Válasszunk egy tetszőlegesen kicsi $\delta > 0$ konstanst, ezzel

$$\sup_{\omega} |\hat{f}(\omega+\delta) - \hat{f}(\omega)| = \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} (e^{-i\delta t} - 1)\, dt \right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-i\delta t} - 1|\, dt$$

Az integrál létezik, mert $|e^{-i\delta t} - 1||f(t)| \leq 2|f(t)|$, és $f \in (\mathrm{L}^1(\mathbb{R}))$, továbbá $|e^{-i\delta t} - 1| \to 0$ ha $\delta \to 0$, ennek alapján, mivel az integrálás és a határérték felcserélhető (Lebesgue-féle konvergenciatétel), a jobb oldalon álló mennyiség $0$-hoz tart, ha $\delta \to 0$. $\square$

# A Fourier-transzformáció néhány tulajdonsága

## Tétel

*Az $f$ függvény $f'$ deriváltja létezik, és mindkettő $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$-beli függvény, akkor a derivált Fourier-transzformáltja*

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

## Bizonyítás.

A parciális integrálás elvének alkalmazásával:

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t}\, dt = [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega) e^{-i\omega t}\, dt$$

$\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$-re $f \to 0$, ha $t \to \pm\infty$, tehát az első tag eltűnik, így

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = i\omega \hat{f}(\omega).$$

$\square$

# A Fourier-transzformáció néhány tulajdonsága

## Tétel

*Az $f$ függvény Fourier-transzformáltja*

$$\hat{f}(\omega) \to 0 \quad \textit{ha} \quad \omega \to +\infty \textit{ vagy } -\infty.$$

*(Riemann-Lebesgue lemma)*

## Bizonyítás.

Ha létezik $f'$ és $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$-beli függvény, akkor

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{|\widehat{f'}(\omega)|}{|\omega|} \leq \frac{\|f'(\omega)\|_1}{|\omega|} \to 0 \quad \text{ha} \quad \omega \to \pm\infty.$$

Általános esetben keresünk olyan $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ függvényt, amelynek létezik és $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$-beli a deriváltja, és valamilyen $\epsilon > 0$-ra $|f(t) - g(t)| < \epsilon$.

$$|\hat{f}(\omega)| \leq |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| + |\hat{g}(\omega)| \leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\omega)| \leq \epsilon + |\hat{g}(\omega)|.$$

$\square$

# A konvolúció

## Definíció

*$f$ és $g$ $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ térhez tartozó függvények. $f$ és $g$ fügvények* **konvolúció***ján a következő függvényt értjük:*

$$h(t) = (f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$h(t)$ $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$-beli függvény, mivel $\|h\|_1 <= \|f\|_1\|g\|_1$, ugyanis

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-\tau)||g(\tau)|\,d\tau\,dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-\tau)|\,dt\right] d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt\end{aligned}$$

# A konvolúció tulajdonságai

A **konvolúció** műveletére igaz

- a kommutativitás — $f * g = g * f$
- az asszociativitás — $(f * g) * e = f * (g * e)$

$f, g, e \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ függvényekre.

Kérdés: Létezik-e egységelem? Azaz,létezik-e $d \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, hogy

$$f * d = f \quad (f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}))$$

A válasz: **nem**!

Az $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tér elemei a konvolúció műveletére nézve *kommutatív félcsoportot* alkotnak.

# A konvolúció tulajdonságai

A konvolúció fontos tulajdonsága:

konvolúció Fourier-transzformáltja

## Tétel

*Legyenek $f$ és $g$ az $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ térbe tartozó függvények. Ekkor*

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Azaz:

$$\textbf{konvolúció} \xrightarrow[\mathcal{F}\{.\}]{} \textbf{szorzás}.$$

# A konvolúció tulajdonságai

**Bizonyítás.**

A konvolúció Fourier-transzformáltja

$$\widehat{(f*g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\, e^{i\omega t}\, dt.$$

Az integrálások sorrendje felcserélhető (Lebesgue-integrálokra ez Fubini tétele), így

$$\widehat{(f*g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{i\omega t}\, dt\; g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega\tau}g(\tau)\, d\tau = \hat{f}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

$\square$

# A konvolúció tulajdonságai

Visszatérünk a problémára: létezik-e a konvolúcióval képzett algebrai struktúrában *egységelem*? Amennyiben létezik egységelem, azaz létezik $d \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, hogy

$$f * d = f,$$

akkor a Fourier-transzformáltakra

$$\hat{f}(\omega) \cdot \hat{d}(\omega) = \hat{f}(\omega),$$

amiből következne, hogy

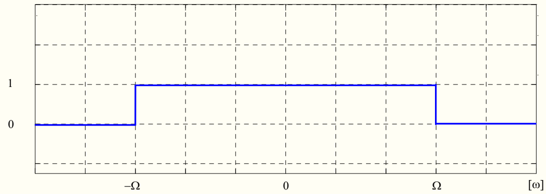
$$\hat{d}(\omega) \equiv 1.$$

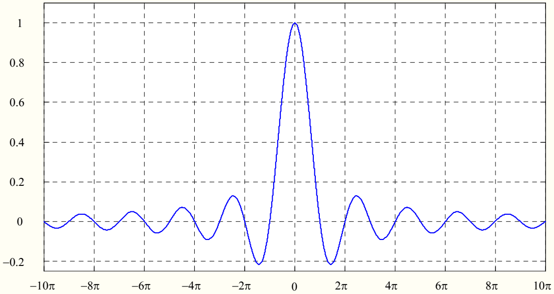
Ez azonban ellentmond a Riemann-Lebesgue lemmának — nem létezik ilyen Fourier-transzformált.

Ötlet: *közelítő egységelem* — $d_k \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ függvények sorozata, amelyekre

$$\lim_{k\to\infty} (f * d_k) = f$$

# Közelítő egységelem



# Közelítő egységelem

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_\Omega(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t}\, d\omega = \left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{-\Omega}^{\Omega} =$$
$$= \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{it} = 2\Omega \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}$$

Minél nagyobb $\Omega$, annál **keskenyebb** és **magasabb** pulzus!

# $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$-beli függvények Fourier-transzformáltja

A közelítő egységelem segítségével a Fourier-transzformáció kiterjeszthető az $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ térre.

Az $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ függvények közelítése $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$-beli függvényekkel:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{ha} \quad |t| \leq T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$f_T(t)$ függvény benne van az $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ térben. Definiáljuk a $w_T$ függvényt:

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad |t| \leq T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f_T(t) = f(t) w_T(t) \implies \hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{w}_T(\omega)$$

$w_T$ függvény közelítő konvolúciós egységelem a frekvenciatartományban.

# $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$-beli függvények Fourier-transzformáltja

Ha $T \to \infty$, akkor bizonyos értelemben vett határátmenettel (Cauchy)

$$f_T(t) \to f(t) \quad \text{és} \quad \hat{f}_T(\omega) \to \hat{f}(\omega)$$

Ilyen módon értelmezhető az $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ térhez tartozó függvények Fourier-transzformáltja.

Ennek precíz kifejtése: *Plancherel*-tétel.

Ennek értelmében a Fourier-transzformáció egy

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$$

*leképezés* vagy *operátor*.

Inverze szintén

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$$

# Az inverz Fourier-transzformáció

Az $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ térben létezik az inverz transzformáció:

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(\omega) = x(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

A változók a jelfeldolgozásban:

- $t$ – idő
- $\omega$ – körfrekvencia: $\omega = 2\pi f$, ahol $f$ a frekvencia

A jelek frekvenciatartománybeli leírása $X(f) := \hat{x}(f)$ frekvencia-függvényekkel: spektrum, spektrális leírás.

# A Dirac-delta

Formálisan értelmezhető az $\hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{w}_T(\omega)$ kifejezésben

$$\hat{w}(\omega) = \lim_{T \to 0} \hat{w}_T$$

"függvény", amely a konvolúciós egységelem lenne, jelölése $\delta(\omega)$.

$\delta(\omega)$ nem függvény — disztribúció. Közkeletű neve: Dirac-delta.

Néhány formális definíció / összefüggés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, d\omega = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dt = \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, d\omega = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\, dt = f(\tau)$$

**Eltolás időtartományban:**

$$\mathcal{F}\{x(t-T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-T)e^{-i\omega t}\,dt$$

Alkalmazva az $u = t - T$ helyettesítést:

$$\mathcal{F}\{x(t-T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i\omega(u+T)}\,du = e^{-i\omega T}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i\omega u}\,du$$

Tehát

$$\mathcal{F}\{x(t-T)\} = e^{-i\omega T}\mathcal{F}\{x(t)\}$$

# A Fourier-transzformáció tulajdonságai

**Eltolás frekvenciatartományban:**

$$F(\omega - \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(\omega - \Omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{i\Omega t}] e^{-i\omega t}\, d$$

Ez az $x(t)e^{i\Omega t}$ függvény Fourier-transzformáltja.

Mit jelent ez?

$x(t)e^{i\Omega t} = x(t)[\cos \Omega t + i \sin \Omega t]$ —

moduláció (amplitudómoduláció)

# A Fourier-transzformáció tulajdonságai

**Differenciálás:**

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

A parciális integrálás elvének alkalmazásával:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x'(t) e^{-i\omega t}\, dt = \left[x(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-i\omega) e^{-i\omega t}\, dt$$

Az $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ vagy $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ függvényei a $\pm\infty$-ben $0$ értékűek, vagy $0$-hoz tartanak, így

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = i\omega \mathcal{F}\{x(t)\}$$

# Folytonos idejű LTI rendszer

Lineáris időinvariáns (dinamikus) rendszer – LTI (Linear Time-Invariant)
**Matematikai modell:** lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + \cdots + a_n y^n = b_0 x + b_1 \dot{x} + b_2 \ddot{x} + \cdots + b_m x^m$$

Alkalmazzuk a **Fourier–transzformációt**:

$$\mathfrak{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{\mathtt{i}\,\omega t}\, dt$$

Alkalmazásának feltétele: definíció szerint $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, a Plancherel-féle általánosítás értelmében $x \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, azaz *energiakorlátos* jel.

Vezessük be a $s = \mathtt{i}\,\omega$ jelölést, ahol $s$ egy komplex változó, $s = \mathtt{i}\,\omega$ tehát az imaginárius tengelyt jelöli.

Ismert tétel szerint:

$$\mathfrak{F}\{y^{(k)}(t)\} = s^k Y(s) \quad \text{ha} \quad \mathfrak{F}\{y(t)\} = Y(s)$$

# Folytonos idejű LTI rendszer

A differenciálegyenlet algebrai egyenletbe megy át:

$$(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n) Y(s) = (b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m) X(s)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n} = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + b_1' s + b_2' s^2 + \cdots + b_m' s^m}{1 + a_1' s + a_2' s^2 + \cdots + a_n' s^n}$$

$A = \frac{b_0}{a_0}$ erősítés (gain) bevezetésével és a (')-ket elhagyva

$$W(s) = A \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}$$

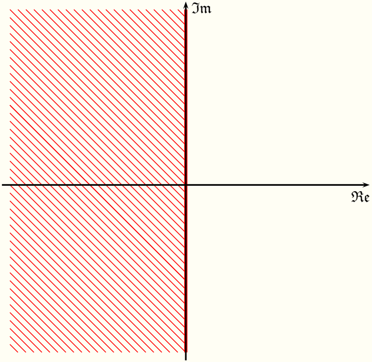
*átviteli függvényt* kapjuk.

# Folytonos idejű LTI rendszer

**Stabilitás:** $W(s)$ átviteli függvény pólusaival kifejezhető.

Értelmzési tartományát kiterjesztjük a komplex síkra:

$$s = \delta + \mathtt{i}\,\omega \quad \delta, \omega \in \mathbb{R}$$




A stabil rendszer $W(s)$ átviteli függvényének pólusai a bal komplex félsíkra esnek.

$W(s)$ a jobb komplex félsíkon analitikus függvény.

# A Parseval egyenlőség

## Tétel

*Minden $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ függvényre érvényes az alábbi egyenlőség:*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

*Ezt az összefüggést* **Parseval egyenlőség***nek, vagy* **Plancherel formulá***nak nevezzük.*

Egy formális bizonyítást adunk, alkalmazzuk a $\delta$-függvény integrál-alakját.

Néhány összefüggés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\, dt = f(\tau)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t}\, d\omega = \delta(t) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t}\, dt = \delta(\omega)$$

# A Parseval egyenlőség

## Bizonyítás.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\,d\omega \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega')} e^{-i\omega' t}\,d\omega' \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega')} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t}\,dt \right) d\omega'\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega')}\delta(\omega-\omega')\,d\omega'\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega')}\delta(\omega-\omega')\,d\omega' \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$$

□

# A Fourier-transzformáció fizikai jelentése

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad f, F \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$$

$F(\omega)$ komplex értékű függvény, értelmezése:

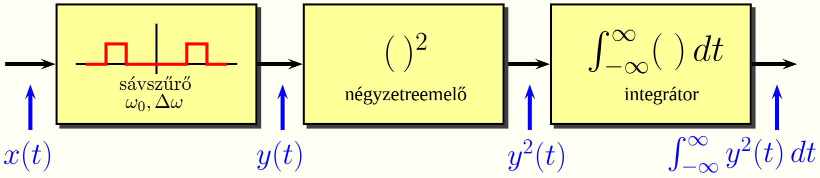
- valós és képzetes rész — koszinusz és színusz transzformált (kvadratúra spektrum)
- abszolút érték és fázis — $|F(\omega)|$ amplitudó-spektrum és $\arg[F(\omega)]$ fázis-spektrum
  - $|F(\omega)| = |F(-\omega)|$ páros függvény
  - $\arg[F(-\omega)] = -\arg[F(\omega)]$ páratlan függvény
- abszolút érték-négyzete — $|F(\omega)|^2 = F(\omega)\overline{F(\omega)} = F(\omega)F(-\omega)$, fizikai értelmezése a Parseval egyenlőség alapján:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

négyzetes idő szerinti integrál — **energia** jellegű mennyiség

# A Fourier-transzformáció fizikai jelentése

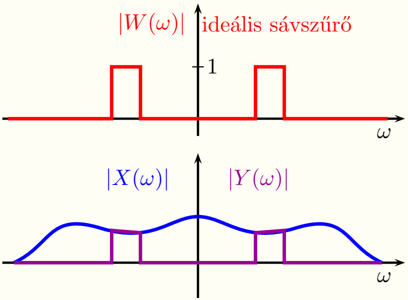
Egy elképzelt mérőműszer:




$$Y(\omega) = W(\omega)X(\omega)$$

ami időtartományban konvolúciónak felel meg

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)w(t-\tau)\,d\tau$$



# A Fourier-transzformáció fizikai jelentése

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 |X(\omega)|^2\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} |X(\omega)|^2\,d\omega \cong 2\frac{1}{2\pi}|X(\omega_0)|^2\Delta\omega = E(\omega_0)$$

a jel $\omega_0$ frekvencián szállított energiája

$$\frac{1}{2\pi}|X(\omega_0)|^2 \cong \frac{E(\omega_0)}{2\Delta\omega} \quad \omega = 2\pi f \quad |X(f_0)|^2 \cong \frac{E(f_0)}{2\Delta f}$$

$|X(\omega)|^2$ **energiasűrűség** függvény

# Sztochasztikus jelek spektrálanalízise

Sztochasztikus jelekre nem teljesül az abszolút vagy négyzetes integrálhatóság

— nem létezik Fourier-transzformáltjuk.

Ergodikus stacionárius sztochasztikus jelek *spektrális* függvénye:

**autokorreláció (autokovariancia) függvényük Fourier–transzformáltja**

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-\mathrm{i}\,\omega\tau}\, d\tau \quad \text{ahol} \quad R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

Ez az **auto–teljesítménysűrűség** (APSD – Auto Power Spectral Density) függvény.

Az autokorreláció (autokovariancia) függvény $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$-beli függvény?

Korlátos jelek autokorreláció (autokovariancia) függvénye a $\delta$-függvénnyel kiterjesztett $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ térbe tartoznak.

# Sztochasztikus jelek spektrálanalízise

$G_x(\omega)$

auto-teljesítménysűrűség függvény
APSD – Auto Power Spectral Density

Az auto-teljesítménysűrűség függvény tulajdonságai:

$$|G_x(\omega)| = G_x(\omega)$$

valós függvény

$$G_x(-\omega) = G_x(\omega)$$

páros függvény

$$G_y(\omega) = |W(\omega)|^2 G_x(\omega)$$

lineáris rendszer átvitele

# Lineáris rendszer átvitele

A Fourier-transzformáltakra ill. időtartományban:

$$Y(\omega) = X(\omega)W(\omega) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u)x(t-u)\,du$$

Az autokorreláció függvény számítása idő-átlag alapján:

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)y(t+\tau)\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(u)x(t-u)\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(v)x(t+\tau-v)\,dv\right) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)x(t+\tau-v)\,dt\,du\,dv = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u)R_x(\tau+u-v)\,du\,dv
\end{aligned}$$

# Lineáris rendszer átvitele

A spektrális függvény számítása:

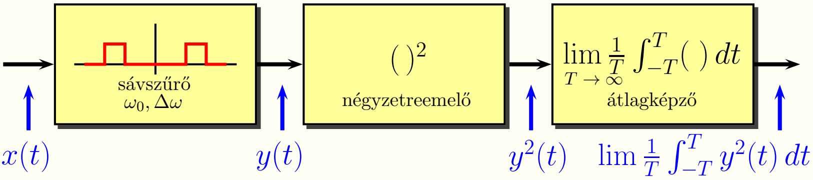
$$
\begin{aligned}
G_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) R_x(\tau + u - v)\, du\, dv\, e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + u - v) e^{-i\omega\tau}\, d\tau\, du\, dv =
\end{aligned}
$$

$z = \tau + u - v$ helyettesítéssel

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \left( \int_{-\infty}^{\infty} R_x(z) e^{-i\omega z}\, dz \right) e^{-i\omega u} e^{i\omega v}\, du\, dv = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) e^{-i\omega u}\, dv \int_{-\infty}^{\infty} w(u) e^{i\omega v}\, du\, G_x(\omega) = \\
&= W(\omega) W(-\omega) G_x(\omega) = W(\omega) \overline{W(\omega)} G_x(\omega) = |W(\omega)|^2 G_x(\omega)
\end{aligned}
$$

# Sztochasztikus jelek spektrálanalízise

A teljesítménysűrűség függvény fizikai értelmezése:




teljesítménymérő műszer

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega)\,d\omega$$

mivel $e^{\mathrm{i}\,\omega\tau} = 1$, ha $\tau = 0$

A sávszűrő átviteli függvényével: $G_y(\omega) = |W(\omega)|^2 G_x(\omega)$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 G_x(\omega)\,d\omega = 2\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} G_x(\omega)\,d\omega$$

Az integrál egy közelítését alkalmazva:

$$P \cong 2G_x(\omega_0)\Delta\omega$$

Ennek alapján:

$$G_x(\omega_0) \cong \frac{P}{2\Delta\omega}$$

Jogos a **teljesítménysűrűség függvény** elnevezés.