

# A jelfeldolgozás alapjai

**DR. SOUMELIDIS ALEXANDROS**  
**Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék**



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapest, 2017.



- 1 Bevezetés
- 2 Bevezetés a lineáris terek elméletébe
- 3 A Fourier-transzformáció
- 4 Jelek és rendszerek
- 5 Kapcsolat az idő- és frekvenciatartomány között
- 6 Az Fourier-transzformáció fizikai jelentése
- 7 A teljesítménysűrűség függvény



Nem-periodikus – "tranziens" jelek:

$f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , amelyek értelmezési tartományukban korlátosak, vagy valamilyen  $p$ -re ( $0 < p < \infty$ ) a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt$$

integrál létezik és véges értékű.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \quad \text{egy } f(t)\text{-re alkalmazott } \textit{norma},$$

$f$  függvények tere egy *normált lineáris tér*.



- 1 Bevezetés
- 2 Bevezetés a lineáris terek elméletébe**
- 3 A Fourier-transzformáció
- 4 Jelek és rendszerek
- 5 Kapcsolat az idő- és frekvenciatartomány között
- 6 Az Fourier-transzformáció fizikai jelentése
- 7 A teljesítménysűrűség függvény



## Definíció

$\mathcal{V}$  lineáris vektortér **vektoroknak** nevezett elemek olyan halmaza, amelyre  $\mathbb{F}$  skalár testtel kapcsolatban teljesülnek az alábbi axiómák:

- 1 Létezik egy **összeadásnak** nevezett művelet, amely minden  $(x, y) \in \mathcal{V}$  párhoz hozzárendel egy **összegnek** nevezett  $x + y$  vektort, hogy
  - 1 az összeadás kommutatív,  $x + y = y + x$ ,
  - 2 az összeadás asszociatív,  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
  - 3  $\exists$  egyetlen  $0$  vektor, hogy  $\forall x \in \mathcal{V}$ -re  $x + 0 = x$ ,
  - 4  $\forall x \in \mathcal{V}$ -hez  $\exists$  egyetlen  $-x$  vektor, hogy  $x + (-x) = 0$ .
- 2 Létezik egy **skalárral való szorzásnak** nevezett művelet, amely minden  $\alpha \in \mathbb{F}$  skalárból és  $x \in \mathcal{V}$  vektorból álló párhoz hozzárendeli az  $\alpha$  és  $x$  **szorzatának** nevezett  $\alpha x$  vektort úgy, hogy
  - 1 a skalárral való szorzás asszociatív,  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ,
  - 2  $\forall x \in \mathcal{V}$ -re  $1x = x$ .
- 3 Az összeadás és a skalárral való szorzás disztributív:
  - 1  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ,
  - 2  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .



## Definíció

Egy  $\mathcal{V}$  vektortérből vett  $\{x_i\}$  vektorok lineáris kombinációjának az  $\mathbb{F}$  testből vett  $\{\alpha_i\}$  skalárokkal képzett

$$\sum_i \alpha_i x_i$$

vektort értjük.

A lineáris kombináció (lineárkombináció) vonatkozhat véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok elemre.



## Definíció

Vektorok véges  $\{x_i\}$  halmazát akkor nevezzük **lineárisan függetlennek**, ha a 0-vektor 0 együtthatókkal állítható elő az  $\{x_i\}$  vektorok lineárkombinációjaként, azaz

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0$$

esetén minden  $i$  indexre  $\alpha_i = 0$ , továbbá akkor nevezzük **lineárisan összefüggőnek**, ha a lineárkombináció nem minden  $\alpha_i$  együtthatója 0.

A lineáris függetlenség fogalma kiterjeszthető végtelen halmazokra:

Egy  $\mathcal{V}$  halmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független vektorokból áll.



A bázis lényegében egy koordináta rendszer valamely vektortérben, lehetővé teszi, hogy a tér vektoraihoz numerikus értékeket tudjunk rendelni, és azokkal számolni.

## Definíció

A  $\mathcal{X}$  lineárisan független halmazt **bázisnak** nevezünk a  $\mathcal{V}$  vektortérben, ha  $\mathcal{V}$  minden eleme előállítható  $\mathcal{X}$  lineáris kombinációjaként.

A  $\mathcal{V}$  vektorteret **véges dimenziós**nak mondunk, ha van véges bázisa.

A bázis elemeinek száma a vektortér **dimenziója**.





Néhány fontos állítás (tétel) a véges dimenziós vektorterek köréből:

- Véges dimenziós vektortér tetszőleges vektora egyértelműen kifejezhető bázisának lineárkombinációjaként.
- Véges dimenziós vektortérben minden lineárisan független halmaz kiegészíthető bázissá.
- Tetszőleges véges dimenziós vektortér bármely két bázisa ugyanannyi elemet tartalmaz.
- Egy  $n$ -dimenziós  $\mathcal{V}$  vektortérben  $n + 1$  elem lineárisan összefüggő.
- Egy  $n$ -dimenziós  $\mathcal{V}$  vektortérben egy  $n$  elemű halmaz pontosan akkor bázis, ha lineárisan független.

Végtelen dimenziós lineáris terek:

- Nem feltétlenül találunk bázist.
- Ha találunk bázist, az megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz.
- Sok esetben több ekvivalens bázis is konstruálható.



A *metrikus tér* egy vektortér, amelyen **távolságfogalmat** – **metrikát** – definiálunk.

**Távolság:**

## Definíció

*Távolságnak nevezük az  $\mathcal{V}$  vektortér elemein értelmezett*

$$d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

*valós értékű függvényt, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:*

- 1  $d(x, y) \geq 0$ ,
- 2  $d(x, y) = 0$  akkor és csak akkor, ha  $x = y$ ,
- 3  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- 4  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (háromszög egyenlőtlenség),

*$x, y, z \in \mathcal{V}$  elemekre.*



A **normált tér** egy vektortér, amelyen **normát** definiálunk. A norma a vektortér elemein értelmezett valós értékű funkcionál.

Funkcionál: a lineáris tér minden vektorához hozzárendel egy skalárt.

**Norma:**

## Definíció

*Normának nevezzük az  $\mathcal{V}$  vektortér elemein értelmezett valós funkcionált, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:*

- 1  $\|x\| \geq 0$ ,
- 2  $\|x\| = 0$  akkor és csak akkor, ha  $x = 0$ ,
- 3  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,
- 4  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*$x, y \in \mathcal{V}$  és  $\alpha \in \mathcal{F}$  skalár értékekre.*



Egy normált tér egyben **metrikus** tér is a következő, **norma által indukált metrikával**:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x, y \in \mathcal{V}$$

A norma lényegében egy vektornak a 0 vektortól vett távolsága.

A norma segítségével tudjuk definiálni pl.

- az eltérés,
- a környezet,
- a határérték,
- a konvergencia,
- a folytonosság

fogalmait.



Egy lineáris térhez lehet definiálni un. belső szorzatot. A belső szorzattal ellátott tereket **belsőszorzat-tereknek** nevezzük.

## Definíció

*Belsőszorzat-tér egy  $\mathcal{V}$  lineáris tér az  $\mathbb{F}$  test felett, amelyben létezik egy*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$$

*un. belső (vagy skaláris) szorzat a következő tulajdonságokkal:*

- 1  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
- 2  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$   
 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,
- 3  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , egyenlőség kizárólag, ha  $x = 0$ ,

*$x, y, z \in \mathcal{V}$  és  $\alpha \in \mathcal{F}$  skalár értékekre.*



A belsőszorzat-terek egyben **normált** terek a következő belső szorzat által indukált **természetes normával**:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Megfordítása nem igaz: nem minden normált tér belsőszorzat-tér.

Egy fontos tulajdonság: a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség.

## Tétel

*Minden  $x, y$  vektorra a  $\mathcal{X}$  belsőszorzat-térben igaz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

*egyenlőséggel kizárólag, ha  $x$  és  $y$  lineárisan összefüggők.*



Az **ortogonalitás** (merőlegesség) fogalma a belső szorzattal kapcsolható össze:

## Definíció

A  $\mathcal{X}$  belsőszorzat-térhez tartozó  $x$  és  $y$  vektortörök ortogonálisak egymásra, ha

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Ortogonalis vektorokra érvényes a Pithagorász-tétel:

## Tétel

Ha  $x, y \in \mathcal{X}$  vektorok ortogonálisak, azaz  $\langle x, y \rangle = 0$ , akkor

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

Ortogonalis rendszerről beszélünk, ha a benne foglalt összes vektor páronként ortogonális.



# Ortogonalis projekció

Fejezzük ki  $v \in \mathcal{X}$  vektort a  $\mathcal{X}$  tér egy  $\{x_i\}$  bázisában:

$$v = \sum_i \alpha_i x_i$$

Képezzük belső szorzatát valamelyik  $x_k$  báziselemmel:

$$\langle v, x_k \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i x_i, x_k \right\rangle = \sum_i \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle$$

Amennyiben az  $\{x_i\}$  rendszer ortogonalis (ortonormált), azaz minden  $i, k \in \mathbb{N}$  indexekre

$$\langle x_i, x_k \rangle = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (\delta_{ik} - \text{Kronecker} - \text{delta})$$

$\langle v, x_k \rangle = \alpha_k$ , azaz a lineárkombináció együtthatóit kapjuk.

Tetszőleges vektor előállítása ortogonalis bázisban: **ortogonalis projekció** a báziselemekre.





A lineáris tér vektorai: **függvények**.

Példa: az  $L^p(\mathbb{R})$  terek ( $0 < p \leq \infty$ ) – elemei  $x(t)$  valós számegyenesen értelmezett függvények ( $t \in \mathbb{R}$ ).

Tipikusan **normált terek**,  $L^p(\mathbb{R})$  norma:

$$\|x\|_{L^p} = \begin{cases} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right)^{1/p} & \text{ha } 0 < p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| & \text{ha } p = \infty \end{cases}$$

**Teljesség:** a tér minden konvergens sorozata a tér valamely eleméhez konvergáljon, azaz a határérték ne vezessen ki a térből.

Teljes normált tér — **Banach-tér**.

Teljes belsőszorzat-tér — **Hilbert-tér**.

Bizonyíthatók a következő állítások:

- Az  $L^p(\mathbb{R})$  terek Banach-terek.
- Az  $L^2(\mathbb{R})$  tér Hilbert-tér.



# $L^p$ terek

- $L^1(\mathbb{R})$  — az abszolút integrálható függvények tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$$

teljes normált tér – Banach-tér.

- $L^2(\mathbb{R})$  — a négyzetesen integrálható függvények tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

teljes normált tér — Banach-tér, továbbá teljes belső szorzat-tér — Hilbert-tér a következő belső szorzattal:

$$\langle x, y \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$$

- $L^\infty(\mathbb{R})$  — a korlátos függvények tere

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \infty \quad L^\infty(\mathbb{R}) \text{ tér, normája} \quad \|x\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$$

teljes normált tér — Banach-tér



# Tranziens jelek leírása

- $L^1(\mathbb{R})$  — az **abszolút integrálható jelek** tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$$

egy Banach-tér.

- $L^2(\mathbb{R})$  — az **energiakorlátos jelek** tere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{normája} \quad \|x\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

egy Hilbert-tér a következő belső (vagy skalár-) szorzattal:

$$\langle x, y \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$$

- $L^\infty(\mathbb{R})$  — az **amplitudóban korlátos jelek** tere

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \infty \quad L^\infty(\mathbb{R}) \text{ tér, normája} \quad \|x\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$$

egy Banach-tér



# Az $L^p(\mathbb{R})$ terek tulajdonságai

$f, g \in L^p(\mathbb{R})$  függvényekre

**Minkowski egyenlőtlenség** (a norma definíciója szerinti 4. axióma)

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

**Hölder egyenlőtlenség**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p(p-1)^{-1}}$$

Hilbert térben

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_{p(p-1)^{-1}}$$

**Schwartz egyenlőtlenség** (Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij)

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Hilbert térben

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$



- 1 Bevezetés
- 2 Bevezetés a lineáris terek elméletébe
- 3 A Fourier-transzformáció**
- 4 Jelek és rendszerek
- 5 Kapcsolat az idő- és frekvenciatartomány között
- 6 Az Fourier-transzformáció fizikai jelentése
- 7 A teljesítménysűrűség függvény



## Definíció

Az  $f \in L^1(\mathbb{R})$  függvény Fourier-transzformáltja

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Az integrál nyilvánvalóan létezik, mivel  $f(t)e^{-i\omega t}$  is  $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvény.

Egy  $f \in L^1(\mathbb{R})$  függvény Fourier-transzformáltja  $\hat{f}(\omega)$  az  $L^\infty(\mathbb{R})$  térbe tartozó függvény, azaz a Fourier-transzformáció  $L^1(\mathbb{R})$  térből  $L^\infty(\mathbb{R})$  térbe képez le:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

Bizonyítása: triviális, a definíció szerinti integrál minden  $\omega$ -ra véges értékű, amelynek van maximuma.



# A Fourier-transzformáció néhány tulajdonsága

## Tétel

Az  $f$  függvény  $\hat{f}(\omega)$  Fourier-transzformáltja egyenletesen folytonos  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás.

Válasszunk egy tetszőlegesen kicsi  $\delta > 0$  konstanst, ezzel

$$\begin{aligned}\sup_{\omega} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &= \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} (e^{-i\delta t} - 1) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-i\delta t} - 1| dt\end{aligned}$$

Az integrál létezik, mert  $|e^{-i\delta t} - 1| |f(t)| \leq 2|f(t)|$ , és  $f \in (L^1(\mathbb{R}))$ , továbbá  $|e^{-i\delta t} - 1| \rightarrow 0$  ha  $\delta \rightarrow 0$ , ennek alapján, mivel az integrálás és a határérték felcserélhető (Lebesgue-féle konvergenciatétel), a jobb oldalon álló mennyiség 0-hoz tart, ha  $\delta \rightarrow 0$ .  $\square$



# A Fourier-transzformáció néhány tulajdonsága

## Tétel

Az  $f$  függvény  $f'$  deriváltja létezik, és mindkettő  $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvény, akkor a derivált Fourier-transzformáltja

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega).$$

## Bizonyítás.

A parciális integrálás elvének alkalmazásával:

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t} dt$$

$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ -re  $f \rightarrow 0$ , ha  $t \rightarrow \pm\infty$ , tehát az első tag eltűnik, így

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega \widehat{f}(\omega).$$







# A Fourier-transzformáció néhány tulajdonsága

## Tétel

Az  $f$  függvény Fourier-transzformáltja

$$\hat{f}(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \omega \rightarrow +\infty \text{ vagy } -\infty.$$

(Riemann-Lebesgue lemma)

## Bizonyítás.

Ha létezik  $f'$  és  $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvény, akkor

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{|\hat{f}'(\omega)|}{|\omega|} \leq \frac{\|f'(\omega)\|_1}{|\omega|} \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \omega \rightarrow \pm\infty.$$

Általános esetben keresünk olyan  $g \in L^1(\mathbb{R})$  függvényt, amelynek létezik és  $L^1(\mathbb{R})$ -beli a deriváltja, és valamilyen  $\epsilon > 0$ -ra  $|f(t) - g(t)| < \epsilon$ .

$$|\hat{f}(\omega)| \leq |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| + |\hat{g}(\omega)| \leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\omega)| \leq \epsilon + |\hat{g}(\omega)|.$$





## Definíció

$f$  és  $g \in L^1(\mathbb{R})$  térhez tartozó függvények.  $f$  és  $g$  függvények **konvolúcióján** a következő függvényt értjük:

$$h(t) = (f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

$h(t)$   $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvény, mivel  $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ , ugyanis

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - \tau)| |g(\tau)| d\tau dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - \tau)| dt \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \end{aligned}$$



# A konvolúció tulajdonságai

A **konvolúció** műveletére igaz

- a kommutativitás —  $f * g = g * f$
- az asszociativitás —  $(f * g) * e = f * (g * e)$

$f, g, e \in L^1(\mathbb{R})$  függvényekre.

Kérdés: Létezik-e egységelem? Azaz, létezik-e  $d \in L^1(\mathbb{R})$ , hogy

$$f * d = f \quad (f \in L^1(\mathbb{R}))$$

A válasz: **nem!**

Az  $L^1(\mathbb{R})$  tér elemei a konvolúció műveletére nézve *kommutatív félcsoportot* alkotnak.



# A konvolúció tulajdonságai

A konvolúció fontos tulajdonsága:

konvolúció Fourier-transzformáltja

## Tétel

*Legyenek  $f$  és  $g$  az  $L^1(\mathbb{R})$  térbe tartozó függvények. Ekkor*

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Azaz:

**konvolúció**  $\xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}}$  **szorzás.**



## Bizonyítás.

A konvolúció Fourier-transzformáltja

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau e^{i\omega t} dt.$$

Az integrálások sorrendje felcserélhető (Lebesgue-integrálokra ez Fubini tétele), így

$$\begin{aligned}\widehat{(f * g)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{i\omega t} dt g(\tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega\tau}g(\tau) d\tau = \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).\end{aligned}$$





# A konvolúció tulajdonságai

Visszatérünk a problémára: létezik-e a konvolúcióval képzett algebrai struktúrában *egységelem*? Amennyiben létezik egységelem, azaz létezik  $d \in L^1(\mathbb{R})$ , hogy

$$f * d = f,$$

akkor a Fourier-transzformáltakra

$$\hat{f}(\omega) \cdot \hat{d}(\omega) = \hat{f}(\omega),$$

amiből következne, hogy

$$\hat{d}(\omega) \equiv 1.$$

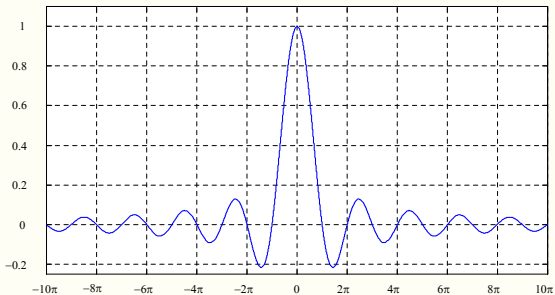
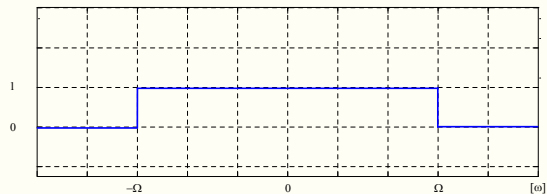
Ez azonban ellentmond a Riemann-Lebesgue lemmának — nem létezik ilyen Fourier-transzformált.

Ötlet: *közelítő egységelem* —  $d_k \in L^1(\mathbb{R})$  függvények sorozata, amelyekre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f * d_k) = f$$



# Közelítő egységlem





$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\Omega}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} d\omega = \left[ \frac{e^{i\omega t}}{it} \right]_{-\Omega}^{\Omega} = \\ &= \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{it} = 2\Omega \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}\end{aligned}$$

Minél nagyobb  $\Omega$ , annál **keskenyebb** és **magasabb** pulzus!





# $L^2(\mathbb{R})$ -beli függvények Fourier-transzformáltja

A közelítő egységilem segítségével a Fourier-transzformáció kiterjeszhető az  $L^2(\mathbb{R})$  térre.

Az  $f \in L^2(\mathbb{R})$  függvények közelítése  $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvényekkel:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{ha } |t| \leq T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$f_T(t)$  függvény benne van az  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  térben. Definiáljuk a  $w_T$  függvényt:

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |t| \leq T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f_T(t) = f(t)w_T(t) \implies \hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{w}_T(\omega)$$

$w_T$  függvény közelítő konvolúciós egységilem a frekvenciatartományban.



# $L^2(\mathbb{R})$ -beli függvények Fourier-transzformáltja

Ha  $T \rightarrow \infty$ , akkor bizonyos értelemben vett határátmenettel (Cauchy)

$$f_T(t) \rightarrow f(t) \quad \text{és} \quad \hat{f}_T(\omega) \rightarrow \hat{f}(\omega)$$

Ilyen módon értelmezhető az  $L^2(\mathbb{R})$  térhez tartozó függvények Fourier-transzformáltja.

Ennek precíz kifejtése: *Plancherel*-tétel.

Ennek értelmében a Fourier-transzformáció egy

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

leképezés vagy *operátor*.

Inverze szintén

$$\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$



# Az inverz Fourier-transzformáció

Az  $L^2(\mathbb{R})$  térben létezik az inverz transzformáció:

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(\omega) = x(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A változók a jelfeldolgozásban:

- $t$  – idő
- $\omega$  – körfrekvencia:  $\omega = 2\pi f$ , ahol  $f$  a frekvencia

A jelek frekvenciatartománybeli leírása  $X(f) := \hat{x}(f)$  frekvenciafüggvényekkel: spektrum, spektrális leírás.



# A Dirac-delta

Formálisan értelmezhető az  $\hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{w}_T(\omega)$  kifejezésben

$$\hat{w}(\omega) = \lim_{T \rightarrow 0} \hat{w}_T$$

"függvény", amely a konvolúciós egységelem lenne, jelölése  $\delta(\omega)$ .

$\delta(\omega)$  nem függvény — disztribúció. Közkeletű neve: Dirac-delta.

Néhány formális definíció / összefüggés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$



**Eltolás időtartományban:**

$$\mathcal{F}\{x(t - T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - T)e^{-i\omega t} dt$$

Alkalmazva az  $u = t - T$  helyettesítést:

$$\mathcal{F}\{x(t - T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i\omega(u+T)} du = e^{-i\omega T} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i\omega u} du$$

Tehát

$$\mathcal{F}\{x(t - T)\} = e^{-i\omega T} \mathcal{F}\{x(t)\}$$



**Eltolás frekvenciatartományban:**

$$F(\omega - \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i(\omega-\Omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{i\Omega t}]e^{-i\omega t} dt$$

Ez az  $x(t)e^{i\Omega t}$  függvény Fourier-transzformáltja.

Mit jelent ez?

$$x(t)e^{i\Omega t} = x(t)[\cos \Omega t + i \sin \Omega t] \text{ —}$$

moduláció (amplitúdómoduláció)



**Differenciálás:**

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-i\omega t} dt$$

A parciális integrálás elvének alkalmazásával:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-i\omega t} dt = [x(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-i\omega)e^{-i\omega t} dt$$

Az  $L^1(\mathbb{R})$  vagy  $L^2(\mathbb{R})$  függvényei a  $\pm\infty$ -ben 0 értékűek, vagy 0-hoz tartanak, így

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{x(t)\}$$



- 1 Bevezetés
- 2 Bevezetés a lineáris terek elméletébe
- 3 A Fourier-transzformáció
- 4 Jelek és rendszerek**
- 5 Kapcsolat az idő- és frekvenciatartomány között
- 6 Az Fourier-transzformáció fizikai jelentése
- 7 A teljesítménysűrűség függvény





# Folytonos idejű LTI rendszer

Lineáris időinvariáns (dinamikus) rendszer – LTI (Linear Time-Invariant)

**Matematikai modell:** lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + \cdots + a_n y^n = b_0 x + b_1 \dot{x} + b_2 \ddot{x} + \cdots + b_m x^m$$

Alkalmazzuk a **Fourier–transzformációt**:

$$\mathfrak{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t} dt$$

Alkalmazásának feltétele: definíció szerint  $x \in L^1(\mathbb{R})$ , a Plancherel-féle általánosítás értelmében  $x \in L^2(\mathbb{R})$ , azaz *energiakorlátos* jel.

Vezessük be a  $s = i\omega$  jelölést, ahol  $s$  egy komplex változó,  $s = i\omega$  tehát az imaginárius tengelyt jelöli.

Ismert tétel szerint:

$$\mathfrak{F}\{y^{(k)}(t)\} = s^k Y(s) \quad \text{ha} \quad \mathfrak{F}\{y(t)\} = Y(s)$$



A differenciálegyenlet algebrai egyenletbe megy át:

$$(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n)Y(s) = (b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m)X(s)$$

$$\begin{aligned}W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} = \\ &= \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + b'_1s + b'_2s^2 + \dots + b'_ms^m}{1 + a'_1s + a'_2s^2 + \dots + a'_ns^n}\end{aligned}$$

$A = \frac{b_0}{a_0}$  erősítés (gain) bevezetésével és a (')-ket elhagyva

$$W(s) = A \frac{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}$$

*átviteli függvényt* kapjuk.

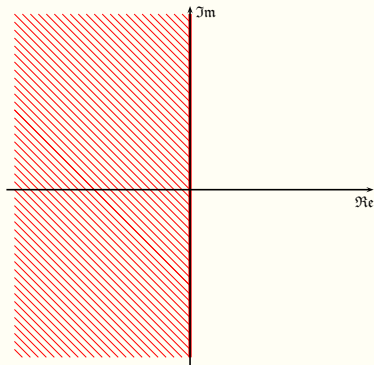


# Folytonos idejű LTI rendszer

**Stabilitás:**  $W(s)$  átviteli függvény pólusaival kifejezhető.

Értelmezési tartományát kiterjesztjük a komplex síkra:

$$s = \delta + i\omega \quad \delta, \omega \in \mathbb{R}$$



A stabil rendszer  $W(s)$  átviteli függvényének pólusai a bal komplex félsíkra esnek.

$W(s)$  a jobb komplex félsíkon analitikus függvény.



- 1 Bevezetés
- 2 Bevezetés a lineáris terek elméletébe
- 3 A Fourier-transzformáció
- 4 Jelek és rendszerek
- 5 Kapcsolat az idő- és frekvenciatartomány között**
- 6 Az Fourier-transzformáció fizikai jelentése
- 7 A teljesítménysűrűség függvény



# A súlyfüggvény

Egy LTI rendszer bemeneti és kimeneti jele közti összefüggés:

$$Y(\omega) = W(\omega)X(\omega)$$

Időtartományban: szorzás  $\rightarrow$  konvolúció

$$y(t) = w(t) * x(t) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(t - \tau)w(\tau) d\tau$$

$w(t)$  – az LTI rendszer súlyfüggvénye (impulzusválasza).

Impulzusválasz – Mikor lesz a rendszer kimenete éppen az átviteli függvény?

$$Y(\omega) = W(\omega) \quad \text{ha} \quad X(\omega) \equiv 1$$

azaz

$$x(t) = \delta(t) \quad (\text{Dirac}) \delta \text{ impulzus}$$

A súlyfüggvény a rendszer  $\delta$ -impulzusra adott válasza.



## Tétel

Minden  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  függvényre érvényes az alábbi egyenlőség:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Ezt az összefüggést **Parseval egyenlőségnek**, vagy **Plancherel formulának** nevezzük.

Egy formális bizonyítást adunk: formálisan alkalmazzuk a  $\delta$ -disztribúció integrál-összefüggéseit.

Néhány összefüggés emlékeztetőül:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t} d\omega = \delta(t) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t} dt = \delta(\omega)$$



## Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega')}e^{-i\omega' t} d\omega' \right) dt = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega')} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt \right) d\omega' d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega')}\delta(\omega-\omega') d\omega' d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega')}\delta(\omega-\omega') d\omega' \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \end{aligned}$$





- 1 Bevezetés
- 2 Bevezetés a lineáris terek elméletébe
- 3 A Fourier-transzformáció
- 4 Jelek és rendszerek
- 5 Kapcsolat az idő- és frekvenciatartomány között
- 6 Az Fourier-transzformáció fizikai jelentése**
- 7 A teljesítménysűrűség függvény





# A Fourier-transzformáció fizikai jelentése

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad f, F \in L^2(\mathbb{R})$$

$F(\omega)$  komplex értékű függvény, értelmezése:

- valós és képzetes rész — koszinusz és színusz transzformált (kvadratúra spektrum)
- abszolút érték és fázis —  $|F(\omega)|$  amplitúdó-spektrum és  $\arg[F(\omega)]$  fázis-spektrum
  - $|F(\omega)| = |F(-\omega)|$  páros függvény
  - $\arg[F(-\omega)] = -\arg[F(\omega)]$  páratlan függvény
- abszolút érték-négyzete —  $|F(\omega)|^2 = F(\omega)\overline{F(\omega)} = F(\omega)F(-\omega)$ , fizikai értelmezése a Parseval egyenlőség alapján:

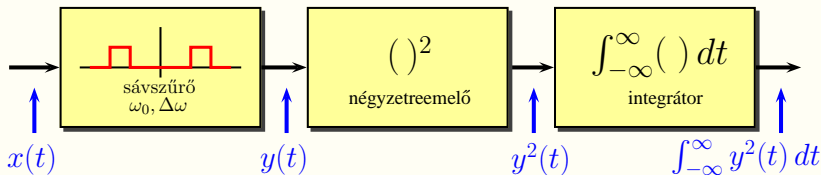
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

négyzetes idő szerinti integrál — **energia** jellegű mennyiség



# A Fourier-transzformáció fizikai jelentése

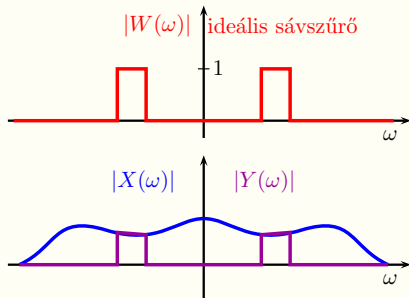
Egy elképzelt mérőműszer:



$$Y(\omega) = W(\omega)X(\omega)$$

ami időtartományban konvolúciónak felel meg

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)w(t - \tau) d\tau$$





# A Fourier-transzformáció fizikai jelentése

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} |X(\omega)|^2 d\omega \cong 2 \frac{1}{2\pi} |X(\omega_0)|^2 \Delta\omega = E(\omega_0)\end{aligned}$$

a jel  $\omega_0$  frekvencián szállított energiája

$$\frac{1}{2\pi} |X(\omega_0)|^2 \cong \frac{E(\omega_0)}{2\Delta\omega} \quad \omega = 2\pi f \quad |X(f_0)|^2 \cong \frac{E(f_0)}{2\Delta f}$$

$|X(\omega)|^2$  **energiasűrűség** függvény



- 1 Bevezetés
- 2 Bevezetés a lineáris terek elméletébe
- 3 A Fourier-transzformáció
- 4 Jelek és rendszerek
- 5 Kapcsolat az idő- és frekvenciatartomány között
- 6 Az Fourier-transzformáció fizikai jelentése
- 7 A teljesítménysűrűség függvény**



# Sztocasztikus jelek spektrálanalízise

Sztocasztikus jelekre nem teljesül az abszolút vagy négyzetes integrálhatóság

— nem létezik Fourier-transzformáltjuk.

Ergodikus stacionárius sztochasztikus jelek *spektrális* függvénye:

**autokorreláció (autokovariancia) függvényük  
Fourier–transzformáltja**

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{ahol} \quad R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

Ez az **auto–teljesítménysűrűség** (APSD – Auto Power Spectral Density) függvény.

Az autokorreláció (autokovariancia) függvény  $L^2(\mathbb{R})$ -beli függvény?

Korlátos jelek autokorreláció (autokovariancia) függvénye a  $\delta$ -függvénnyel kiterjesztett  $L^2(\mathbb{R})$  térbe tartoznak.



$$G_x(\omega)$$

auto-teljesítménysűrűség függvény  
APSD – Auto Power Spectral Density

Az auto-teljesítménysűrűség függvény tulajdonságai:

$$|G_x(\omega)| = G_x(\omega)$$

valós függvény

$$G_x(-\omega) = G_x(\omega)$$

páros függvény

$$G_y(\omega) = |W(\omega)|^2 G_x(\omega)$$

lineáris rendszer átvitele



A Fourier-transzformáltakra ill. időtartományban:

$$Y(\omega) = X(\omega)W(\omega) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u)x(t-u) du$$

Az autokorreláció függvény számítása idő-átlag alapján:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)y(t+\tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} w(u)x(t-u) du \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} w(v)x(t+\tau-v) dv \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)x(t+\tau-v) dt du dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u)R_x(\tau+u-v) du dv \end{aligned}$$



A spektrális függvény számítása:

$$\begin{aligned}G_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) R_x(\tau + u - v) du dv e^{-i\omega\tau} d\tau = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + u - v) e^{-i\omega\tau} d\tau du dv =\end{aligned}$$

$z = \tau + u - v$  helyettesítéssel

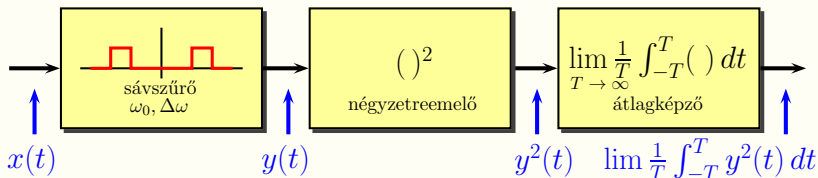
$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \left( \int_{-\infty}^{\infty} R_x(z) e^{-i\omega z} dz \right) e^{-i\omega u} e^{i\omega v} du dv = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} w(v) e^{-i\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} w(u) e^{i\omega u} du G_x(\omega) = \\&= W(\omega) W(-\omega) G_x(\omega) = W(\omega) \overline{W(\omega)} G_x(\omega) = |W(\omega)|^2 G_x(\omega)\end{aligned}$$





# Sztocasztikus jelek spektrálanalízise

A teljesítménysűrűség függvény fizikai értelmezése:



teljesítménymérő műszer

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega) d\omega$$

mivel  $e^{i\omega\tau} = 1$ , ha  $\tau = 0$

A sávszűrő átviteli függvényével:  $G_y(\omega) = |W(\omega)|^2 G_x(\omega)$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 G_x(\omega) d\omega = 2 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} G_x(\omega) d\omega$$



Az integrál egy közelítését alkalmazva:

$$P \cong 2G_x(\omega_0)\Delta\omega$$

Ennek alapján:

$$G_x(\omega_0) \cong \frac{P}{2\Delta\omega}$$

Jogos a **teljesítménysűrűség függvény** elnevezés.